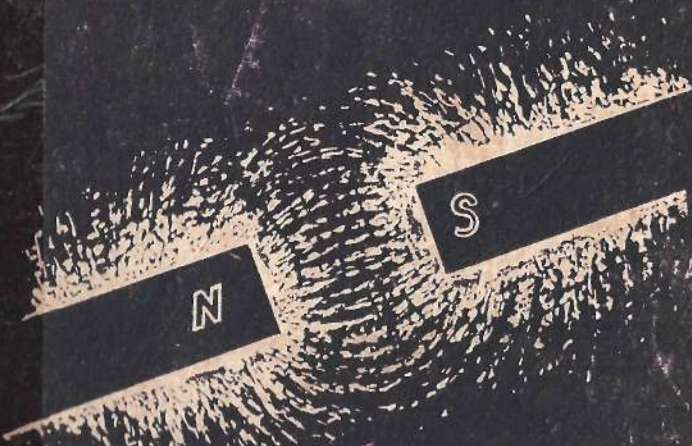
В. М. Варикаш, М. С. Цедрик



Избранные задачи по физике с решениями

В. М. ВАРИКАШ, М. С. ЦЕДРИК

ИЗБРАННЫЕ ЗАДАЧИ ПО ФИЗИКЕ С РЕШЕНИЯМИ

ИЗДАНИЕ ВТОРОЕ,
ИСПРАВЛЕННОЕ И ДОПОЛНЕННОЕ

МИНСК 1966

ИЗДАТЕЛЬСТВО «ВЫСШАЯ ШКОЛА»

Сборник содержит задачи по физике в основном в объеме программы средней школы. В сборник также включены задачи, несколько выходящие за рамки программы, однако они могут быть решены на основе знаний, полученных в средней школе. Задачи по возможности систематизированы и снабжены подробными решениями. Вместе с тем та часть книги, которая содержит решения, может служить методическим пособием как учащимся при подготовке к вступительным экзаменам в высшие учебные заведения, так и молодым учителям в их школьной работе.

Книга состоит из пяти глав: механика; теплота и молекулярная физика; электричество, оптика; строение атома.

Сборник рассчитан на учащихся старших классов, интересующихся физикой, студентов техникумов и вузов, в частности на студентов-заочников. Он явится также ценным пособием для преподавателей физики средних школ и техникумов при проведении физических олимпиад.

$\frac{2-3}{49-65}$

ОТ АВТОРОВ

Составители настоящего пособия широко использовали материал, имеющийся в обширной методической литературе по физике и в задачниках, в журнале «Физика в школе» и в иностранных физических журналах, предназначенных для школы. Кроме того, в сборник вошла часть задач, составленных авторами.

Книга дополнена большим количеством новых задач, при этом подбирались только задачи, требующие большей находчивости и изобретательности, чем обычная школьная задача. Решение таких задач или даже внимательный разбор готовых решений должны помочь школьникам научиться применять свои знания при рассмотрении конкретных вопросов.

Порядок расположения задач в основном соответствует последовательности изложения материала по физике в школе. Сборник разбит на главы, а главы—на разделы, что позволяет довольно легко находить нужные задачи.

При решении задач использовалась преимущественно Международная система единиц (СИ). В конце сборника даны приложения, содержащие основные сведения по Международной системе единиц, таблицы физических величин и физических констант. Эти таблицы дают возможность решать любую задачу, не прибегая к другим пособиям и справочной литературе.

Мы надеемся, что настоящее пособие будет полезно не только школьникам, интересующимся физикой и желающим расширить свой кругозор, но и преподавателям вузов, а также студентам *вузов и втузов. Авторы с благодарностью примут все замечания по улучшению книги и будут признательны за указания возможных погрешностей данного пособия.*

Просьба все предложения направлять по адресу: г. Минск, ул. Кирова, 24, издательство «Высшая школа».

ГЛАВА 1

МЕХАНИКА

КИНЕМАТИКА

1. Автомобиль первую половину пути двигался со скоростью 90 *км/ч*, а вторую — со скоростью 54 *км/ч*. Найти среднюю скорость движения автомобиля.

Дано:

$v_1 = 90$ *км/ч* $= 25$ *м/сек*;

$v_2 = 54$ *км/ч* $= 15$ *м/сек*.

v — ?

Решение

Если общий путь, пройденный автомобилем, обозначим через $2s$, то

$$v_1 = \frac{s}{t_1}, \quad v_2 = \frac{s}{t_2},$$

где t_1 — время, в течение которого автомобиль прошел первую половину пути; t_2 — время, в течение которого автомобиль прошел вторую половину пути.

Среднюю скорость движения автомобиля найдем из уравнения

$$v = \frac{2s}{t_1 + t_2}$$

или после подстановки значений t_1 и t_2

$$v = \frac{2s}{\frac{s}{v_1} + \frac{s}{v_2}} = \frac{2v_1 v_2}{v_1 + v_2},$$

$$v = \frac{2 \cdot 25\ м/сек \cdot 15\ м/сек}{40\ м/сек} \approx 18{,}7\ м/сек.$$

2. Велосипедист едет по пересеченной местности 11 *км*. 6 *км* в гору он двигался со скоростью 7,2 *км/ч*, остальной путь (5 *км*) с горы — со скоростью 36 *км/ч*. Какова его средняя скорость?

Дано:

$s_1 = 6\ км = 6000\ м;$
$s_2 = 5\ км = 5000\ м;$
$v_1 = 7{,}2\ км/ч = 2\ м/сек;$
$v_2 = 36\ км/ч = 10\ м/сек.$
v — ?

Решение

Чтобы получить среднюю скорость, нужно полный путь разделить на время движения, т. е.

$$v = \frac{s}{t} = \frac{s_1 + s_2}{t_1 + t_2},$$

где $s_1 + s_2$ — полный путь, пройденный велосипедистом; t_1 — время, затраченное велосипедистом на преодоление подъема со скоростью v_1; t_2 — время, затраченное на спуск велосипедиста со скоростью v_2.

Среднюю скорость велосипедиста можно найти, вычислив t_1 и t_2 из соотношения $t = \frac{s}{v}$:

$$t_1 = \frac{s_1}{v_1} \quad и \quad t_2 = \frac{s_2}{v_2}.$$

Подставив в формулу для средней скорости значения t_1 и t_2, получим

$$v = \frac{s_1 + s_2}{\frac{s_1}{v_1} + \frac{s_2}{v_2}} = \frac{(s_1 + s_2)\, v_1 v_2}{s_1 v_2 + s_2 v_1},$$

$$v = \frac{(6000\ м + 5000\ м)\cdot 2\ м/сек \cdot 10\ м/сек}{6000\ м \cdot 10\ м/сек + 5000\ м \cdot 2 м/сек} \approx 3{,}1\ м/сек.$$

3. Будет ли одинаково время проезда одного и того же расстояния на катере туда и обратно по реке и по озеру? Скорость течения реки 3 *км/ч*, скорость катера относительно воды в обоих случаях составляет 10 *км/ч*.

Дано:

$v_1 = 3\ км/ч;$
$v_2 = 10\ км/ч$
$\frac{t}{t_3}$ — ?

Решение

Время движения по реке против течения

$$t_1 = \frac{s}{v_2 - v_1}.$$

Время движения по течению

$$t_2 = \frac{s}{v_2 + v_1}.$$

Время движения по реке туда и обратно

$$t = t_1 + t_2 = \frac{s}{v_2 - v_1} + \frac{s}{v_2 + v_1} = \frac{2sv_2}{v_2^2 - v_1^2}.$$

Время движения катера туда и обратно по озеру

$$t_3 = \frac{2s}{v_2}.$$

Отношение времен

$$\frac{t}{t_3} = \frac{2sv_2}{v_2^2 - v_1^2}\cdot\frac{v_2}{2s} = \frac{v_2^2}{v_2^2 - v_1^2}, \qquad \frac{t}{t_3} = \frac{100}{91} \approx 1{,}1,$$

т. е. время проезда по реке в 1,1 раза больше, чем время проезда по озеру.

4. Каким курсом должен лететь самолет, чтобы трасса его полета проходила строго с юга на север, если собственная скорость самолета 360 *км/ч*, а скорость ветра, дующего с востока, составляет 36 *км/ч*?

Рис. 1

Дано:

$v_1 = 36\ км/ч = 10\ м/сек;$
$v_2 = 360\ км/ч = 100\ м/сек.$
α — ?

Решение

Самолет участвует в двух движениях: со скоростью v_2 относительно воздуха и со скоростью v_1 вместе с воздухом относительно Земли (рис. 1). Поэтому истинная скорость самолета относительно Земли

$$\vec{v} = \vec{v}_1 + \vec{v}_2.$$

Из прямоугольного треугольника ABC находим, что

$$\sin\alpha = \frac{v_1}{v_2} = 0{,}1; \quad \alpha \approx 5°40'.$$

5. С какой скоростью и по какому курсу должен лететь самолет, чтобы за время, равное 1 *ч*, пролететь точно на север путь 180 *км*, если во время полета дует северо-западный ветер под углом 30° к меридиану со скоростью 8 *м/сек*?

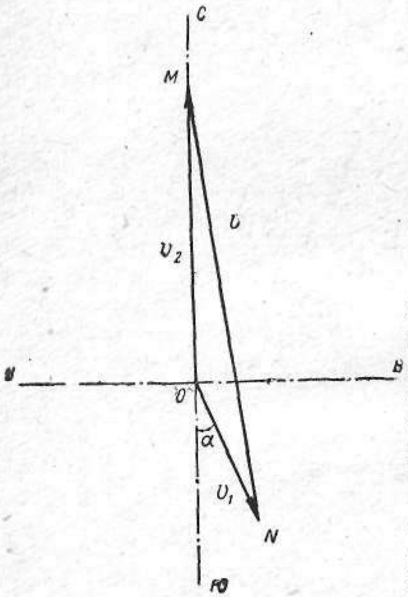


Рис. 2

Дано:

$t = 1$ *ч* $= 3600$ *сек*;
$s = 180$ *км* $= 180000$ *м*;
$\alpha = 30°$;
$v_1 = 8$ *м/сек*.

v_2 — ? $\angle OMN$ — ?

Решение

Самолет участвует в двух движениях: со скоростью v относительно воздуха и со скоростью v_1 вместе с воздухом относительно Земли. По условию задачи скорость v_1 направлена на юго-восток под углом 30° к меридиану.

Скорость самолета относительно Земли $v_2 = \frac{s}{t} = 50$ *м/сек*. По условию задачи скорость v_2 направлена по меридиану на север.

По теореме сложения скоростей

$$\vec{v_2} = \vec{v} + \vec{v_1}.$$

Изобразим это равенство графически (рис. 2). Из чертежа видно, что самолет должен держать курс на северо-запад под углом OMN к меридиану.

Пользуясь теоремой косинусов, из $\triangle OMN$ по двум сторонам ON и OM и углу MON определим сторону NM, т. е. численное значение скорости v:

$$v^2 = v_1^2 + v_2^2 - 2v_1v_2\cos(180° - \alpha);$$

$$v = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + 2v_1v_2\cos\alpha}.$$

После подстановки численных значений получим

$$v = \sqrt{8^2\ м^2/сек^2 + 50^2\ м^2/сек^2 + 2\cdot 8\cdot 50\ м^2/сек^2\cdot 0{,}866} \approx 57\ м/сек.$$

Вычислим $\angle OMN$ (курс самолета).

По теореме синусов

$$\frac{v_1}{\sin(\angle OMN)} = \frac{v}{\sin(180° - \alpha)},$$

откуда

$$\sin(\angle OMN) = \frac{v_1}{v}\sin\alpha,$$

$$\sin(\angle OMN) = \frac{8\ м/сек}{57\ м/сек}\cdot 0{,}5 \approx 0{,}07;$$

$$\angle OMN \approx 4°.$$

6. Два катера, идущие с одинаковыми скоростями, одновременно отошли от причалов A и B, находящихся на противоположных берегах реки, и идут все время по прямой AB, соединяющей причалы. Расстояние между причалами 1 *км*. Прямая AB образует с направлением течения воды в реке угол 60°. Скорость течения воды по всей ширине реки одинакова и равна 2 *м/сек*. Определить: место встречи катеров; угол, под каким они должны двигаться по отношению к прямой AB; скорость движения катеров относительно воды, если известно, что катера встретились через 3 *мин* после их отхода от причалов.

Дано:

$s = 1$ *км* $= 1000$ *м*;
$v_1 = 2$ *м/сек*;
$\alpha = 60°$;
$t = 3$ *мин* $= 180$ *сек*.

s_1 — ? s_2 — ?
β — ? v_2 — ?

Решение

Оба катера одновременно участвуют в двух движениях: в движении относительно воды, если бы она была в покое, и в движении вместе с водой. Следовательно, движение катеров относительно берегов реки, т. е. по прямой AB, является результирующим. Очевидно, катера будут двигаться по прямой AB только в том случае, если диагонали параллелограммов, построенных на слагаемых скоростях v_1 и v_2 движения катеров для любого момента времени, будут совпадать с прямой AB (рис. 3).

Для определения места встречи катеров необходимо найти пути s_1 и s_2, проходимые катерами от причалов по прямой AB до встречи. Так как время движения катеров до встречи известно, то для определения путей s_1 и s_2 надо знать результирующие скорости v_A и v_B движения катеров по прямой AB. Эти скорости равны диагоналям параллелограммов и, как видно из рис. 3, будут:

$$v_A = v_2 \cos\beta + v_1 \cos\alpha;$$
$$v_B = v_2 \cos\beta - v_1 \cos\alpha.$$

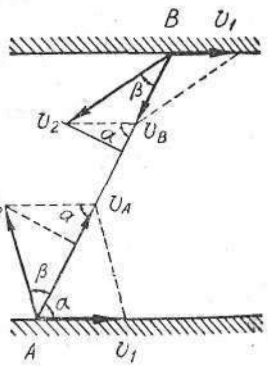


Рис. 3

Умножая предыдущие два уравнения на t, получим:

$$s_1 = (v_2 \cos\beta + v_1 \cos\alpha)\, t;$$
$$s_2 = (v_2 \cos\beta - v_1 \cos\alpha)\, t.$$

По условию задачи

$$s = s_1 + s_2.$$

Отсюда:

$$s_1 = \frac{s}{2} + v_1 \cos\alpha \cdot t;$$
$$s_2 = \frac{s}{2} - v_1 \cos\alpha \cdot t;$$

$$v_2 \cos\beta = \frac{s}{2t}.$$

Подставляя численные значения физических величин и их размерности, получим:

$$s_1 = \frac{1000\ м}{2} + 2\ м/сек \cdot 0{,}5 \cdot 180\ сек = 680\ м;$$
$$s_2 = 1000\ м - 680\ м = 320\ м.$$

Определим v_2 и β (см. рис. 3):

$$v_2 \sin\beta = v_1 \sin\alpha.$$

Решая систему двух последних уравнений, найдем

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{2v_1 \sin\alpha \cdot t}{s}.$$

Подставив численные значения, получим

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{2 \cdot 2\ м/сек \cdot 0{,}866 \cdot 180\ сек}{1000\ м} \approx 0{,}312;$$
$$\beta = 32°.$$

Пользуясь выражением $v_2 \cos\beta = \frac{s}{2t}$, можно определить скорость движения катеров относительно воды v_2:

$$v_2 = \frac{s}{2t \cos\beta}.$$

Подставив численные значения, найдем

$$v_2 = \frac{1000\ м}{2 \cdot 180\ сек \cdot 0{,}848} \approx 3{,}3\ м/сек.$$

7. Автомобиль движется в течение некоторого времени с постоянной скоростью 2 *м/сек*. Затем его движение становится равноускоренным, и он за 20 *сек* проходит путь 150 *м*. Как велики ускорение и конечная скорость автомобиля?

Дано:

$v_0 = 2\ м/сек;$
$t = 20\ сек;$
$s = 150\ м.$

$v - ?\quad a - ?$

Решение

Из формул равноускоренного движения

$$s = v_0 t + \frac{at^2}{2} \quad и \quad v = v_0 + at$$

находим:

$$a = \frac{2(s - v_0 t)}{t^2} \quad и \quad v = \frac{2s - v_0 t}{t},$$
$$a = \frac{2(150\ м - 2\ м/сек \cdot 20\ сек)}{400\ сек^2} = 0{,}55\ м/сек^2;$$
$$v = \frac{2 \cdot 150\ м - 2\ м/сек \cdot 20\ сек}{20\ сек} = 13\ м/сек.$$

8. Тело, двигаясь равноускоренно, проходит два одинаковых отрезка пути в 15 *м* соответственно в течение 2 *сек* и 1 *сек*. Определить ускорение и скорость тела в начале первого отрезка пути.

Дано:

$s = 15\ м;$
$t_1 = 2\ сек;$
$t_2 = 1\ сек.$

$v_1 - ?\quad a - ?$

Решение

Обозначив скорость тела в начале первого отрезка пути через v_1, получим

$$s = v_1 t_1 + \frac{at_1^2}{2}.$$

В конце этого пути тело имело скорость

$$v_2 = v_1 + at_1.$$

Второй участок пути определяется следующим уравнением:

$$s = (v_1 + at_1) t_2 + \frac{at_2^2}{2}.$$

Из этих двух уравнений получим:

$$a = \frac{2s(t_1 - t_2)}{t_1 t_2 (t_1 + t_2)} = 5 \text{ м/сек}^2;$$

$$v_1 = \frac{s(2t_1 t_2 + t_2^2 - t_1^2)}{t_1 t_2 (t_1 + t_2)} = 2{,}5 \text{ м/сек}.$$

9. Поезд двигался со скоростью 54 *км/ч*. При торможении до полной остановки он прошел 500 *м*. Определить ускорение и время торможения.

Дано:

$v_0 = 54$ *км/ч* $= 15$ *м/сек*;
$s = 500$ *м*;
$v = 0$.

a — ? t — ?

Решение

Так как конечная скорость поезда равна нулю, то ускорение и время торможения находим по формулам:

$$a = \frac{v_0^2}{2s}, \quad a = \frac{225 \text{ м}^2/\text{сек}^2}{1000 \text{ м}} = 0{,}225 \text{ м/сек}^2.$$

$$t = \frac{v_0}{a}, \quad t = \frac{15 \text{ м/сек}}{0{,}225 \text{ м/сек}^2} = 66{,}6 \text{ сек}.$$

10. С какой высоты упало тело, если за последнюю секунду своего падения оно прошло путь 24,5 *м*?

Дано:

$h = 24{,}5$ *м*;
$g = 9{,}8$ *м/сек²*.

h_2 — ?

Решение

За время падения t тело прошло путь

$$h_2 = \frac{gt^2}{2}.$$

Путь, проходимый телом за время $t - 1$,

$$h_1 = \frac{g(t-1)^2}{2}.$$

Пройденный путь в последнюю секунду равен

$$h = h_2 - h_1 = \frac{g}{2}[t^2 - (t-1)^2],$$

откуда

$$t = \frac{h}{g} + \frac{1}{2}.$$

Тогда

$$h_2 = \frac{gt^2}{2} = \frac{h^2}{2g} + \frac{h}{2} + \frac{g}{8} \approx 44 \text{ м}.$$

11. С какой начальной скоростью с высоты 19,6 *м* нужно бросить вертикально вниз тело, чтобы оно упало на 1 *сек* раньше, чем при свободном падении?

Дано:

$h = 19{,}6$ *м*;
$\tau = 1$ *сек*.

v_0 — ?

Решение

Пусть время свободного падения тела t. Тогда высота падения

$$h = \frac{gt^2}{2}.$$

С другой стороны, при падении тела с начальной скоростью

$$h = v_0(t - \tau) + \frac{g(t-\tau)^2}{2}.$$

Приравнивая правые части полученных уравнений и учитывая, что $t=\sqrt{\frac{2h}{g}}$, найдем

$$g\cdot\frac{2h}{2g}=v_0\left(\sqrt{\frac{2h}{g}}-\tau\right)+\frac{1}{2}g\left(\sqrt{\frac{2h}{g}}-\tau\right)^2$$

или

$$v_0=\frac{h}{\sqrt{\frac{2h}{g}}-\tau}-\frac{1}{2}g\left(\sqrt{\frac{2h}{g}}-\tau\right),$$

$$v_0=19{,}6\ м/сек-\frac{1}{2}\cdot 9{,}8\ м/сек=14{,}7\ м/сек.$$

12. Тело падает с высоты h_1. Спустя время τ с меньшей высоты начинает падать второе тело. Какова должна быть высота, с которой падает второе тело, чтобы они одновременно упали на землю?

Решение

Пусть второе тело находилось в полете время t, тогда время, в течение которого падало первое тело, равно $t+\tau$. Пути, пройденные первым и вторым телами, соответственно равны

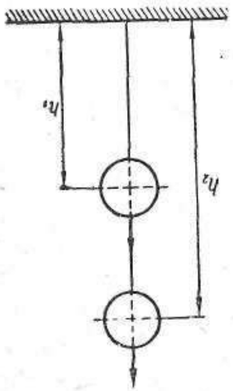


Рис. 4

$$h_1=\frac{g(t+\tau)^2}{2}\quad \text{и} \quad h_2=\frac{gt^2}{g}.$$

Выразим из второго уравнения $t=\sqrt{\frac{2h_2}{g}}$ и подставим в первое:

$$h_1=\frac{g\left(\sqrt{\frac{2h_2}{g}}+\tau\right)^2}{2}.$$

После решения относительно h_2 найдем

$$h_2=h_1-\tau\sqrt{2gh_1}+\frac{1}{2}g\tau^2.$$

13. Баллон поднимается вверх с постоянной скоростью v_0. В определенный момент времени с баллона сброшен камень, падающий на землю в течение 10 *сек*. Как высоко находился баллон (рис. 4), когда камень упал на землю?

Дано:

$t=10$ *сек*;
$g=9{,}8$ *м/сек*^{2}.
h_2 — ?

Решение

Так как камень двигался равнопеременно и начал свое движение с начальной скоростью v_0, то путь, пройденный за время t, будет

$$h_1=-v_0t+\frac{gt^2}{2}.$$

Через тот же промежуток времени t баллон окажется на высоте h_2, равной

$$h_2=h_1+v_0t.$$

Подставляя значение h_1, получим

$$h_2=\frac{gt^2}{2},$$

$$h_2=\frac{9{,}8\cdot 100}{2}=490\ м.$$

14. Два парашютиста A и B одновременно прыгнули с двух самолетов, находящихся на разных высотах, причем парашютист A находился на высоте h_1, B — на высоте h_2 над землей ($h_1>h_2$). Падение парашютистов после раскрытия парашютов примем за равномерное со скоростью v. Определить высоту h, на которой парашютист A должен раскрыть свой парашют, чтобы приземлиться одновременно с парашютистом B. Сопротивлением воздуха до раскрытия парашютов пренебречь.

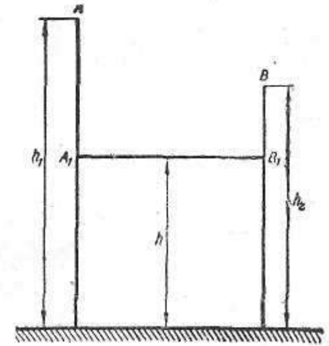


Рис. 5

Решение

Рассмотрим два случая. Первый случай, когда парашютист B сразу раскрыл свой парашют. Пусть парашютист A раскрыл свой парашют в точке A_1 (рис. 5) на высоте h, когда парашютист B был в точке B_1 тоже на высоте h; в этом случае они приземлятся одновременно. Время падения парашютиста A от точки A до точки

A_1 будет $\sqrt{\frac{2(h_1-h)}{g}}$, время падения парашютиста B с раскрытым парашютом будет $\frac{h_2-h}{v}$. Следовательно,

$$\sqrt{\frac{2(h_1-h)}{g}}=\frac{h_2-h}{v}.$$

Решая это квадратное уравнение, находим

$$h=\frac{gh_2-v^2+v\sqrt{v^2+2g(h_1-h_2)}}{g}.$$

Второй случай, когда парашютист B не сразу раскрыл парашют, предлагаем рассмотреть читателям самостоятельно.

15. Тело, двигаясь прямолинейно с ускорением 5 *м/сек²*, достигло скорости 30 *м/сек*, а затем, двигаясь равнозамедленно, остановилось через 10 *сек*. Определить путь, пройденный телом за все время движения.

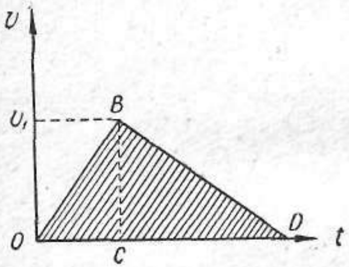


Рис. 6

Дано:

$v_0=0;$
$a_1=5$ *м/сек²*;
$v_1=30$ *м/сек*;
$t=10$ *сек*.

s — ?

Решение

Задача просто решается графически (рис. 6). Из графика скорости следует, что путь численно равен площади треугольника OBD:

$$s=\frac{1}{2}BC\cdot OD.$$

Но $BC=v_1$, $OD=\frac{v_1}{a_1}+t$.

Следовательно,

$$s=\frac{v_1}{2}\left(\frac{v_1}{a_1}+t\right),$$

$$s=\frac{30\ м/сек}{2}\cdot\left(\frac{30\ м/сек}{5\ м/сек^2}+10\ сек\right)=240\ м.$$

16. Какой угол наклона должна иметь крыша, чтобы вода стекала за минимальное время? Ширина крыши $2b$.

Решение

Определим b (рис. 7):

$$b=s\cos\alpha,$$

где

$$s=\frac{at^2}{2}.$$

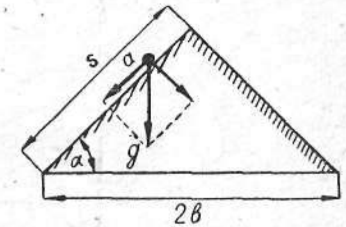


Рис. 7

Ускорение движения капли воды

$$a=g\sin\alpha,$$

откуда

$$b=\frac{1}{2}g\sin\alpha\cdot\cos\alpha\cdot t^2$$

или

$$t^2=\frac{4b}{g\sin 2\alpha}.$$

Время стекания капли будет наименьшим, когда $\sin 2\alpha$ будет иметь наибольшее значение, т. е. при $\sin 2\alpha=1$, или $\alpha=45°$.

17. Снаряд вылетает из орудия с начальной скоростью 490 *м/сек* под углом 30° к горизонту. Найти высоту, дальность и время полета снаряда, не учитывая вращения снаряда и сопротивления воздушной среды.

Дано:

$v_0=490$ *м/сек*;
$\alpha=30°$;
$g=9{,}8$ *м/сек²*.

h — ? s — ? t — ?

Решение

Составляющие скорости по осям x и y (рис. 8) в начальный момент времени равны:

$$v_{0x}=v_0\cos\alpha\quad\text{и}\quad v_{0y}=v_0\sin\alpha.$$

Составляющая v_{0x} остается неизменной в течение всего времени полета снаряда. Составляющая же v_y изменяется, согласно уравнению скорости равнопеременного движения:

$$v_y = v_0 \sin\alpha - gt.$$

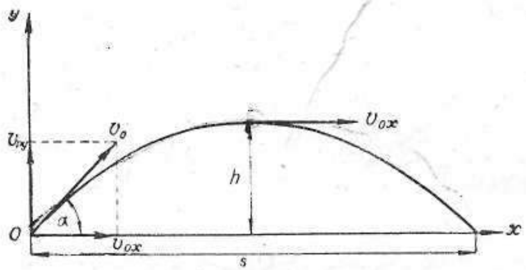


Рис. 8

В наивысшей точке траектории $v_y = 0$, т. е. $v_0 \sin\alpha - gt_1 = 0$, откуда время подъема снаряда до наивысшей точки

$$t_1 = \frac{v_0 \sin\alpha}{g}.$$

Время полета снаряда

$$t = 2t_1 = \frac{2v_0 \sin\alpha}{g}, \qquad t = \frac{2\cdot 490\ м/сек \cdot 0{,}5}{9{,}8\ м/сек^2} = 50\ сек.$$

Для определения высоты h снаряда воспользуемся формулой пути равнозамедленного движения:

$$h = v_{0y}t_1 - \frac{gt^2}{2} = v_0 \sin\alpha \frac{v_0 \sin\alpha}{g} - \frac{g}{2}\left(\frac{v_0 \sin\alpha}{g}\right)^2 = \frac{v_0^2 \sin^2\alpha}{2g},$$

$$h = \frac{490^2\ м^2/сек^2 \cdot 0{,}5^2}{2\cdot 9{,}8\ м/сек^2} \approx 3\,060\ м.$$

Для определения дальности полета снаряда воспользуемся формулой прямолинейного равномерного движения:

$$s = v_{0x}t = v_0 \cos\alpha \frac{2v_0 \sin\alpha}{g} = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g},$$

$$s = \frac{490^2\ м^2/сек^2 \cdot 0{,}866}{9{,}8\ м/сек^2} \approx 21\,000\ м = 21\ км.$$

18. Из точки A свободно падает тело. Одновременно из точки B под углом α к горизонту бросают другое тело так, чтобы оба тела столкнулись в воздухе.

Показать, что угол α не зависит от начальной скорости v_0 тела, брошенного из точки B, и определить этот угол, если $\frac{H}{s} = \sqrt{3}$. Сопротивлением воздуха пренебречь.

Дано:

$\frac{H}{s} = \sqrt{3}.$

$\alpha - ?$

Решение

Оба тела могут встретиться на линии AO (рис. 9) в точке C. Разложим скорость v_0 тела, брошенного из точки B, на горизонтальную v_{0x} и вертикальную v_{0y} составляющие:

$$v_{0x} = v_0 \cos\alpha; \quad v_{0y} = v_0 \sin\alpha.$$

От начала движения до момента встречи пройдет время

$$t = \frac{s}{v_{0x}} = \frac{s}{v_0 \cos\alpha}.$$

За это время тело из точки A опустится на величину

$$H - h = \frac{gt^2}{2},$$

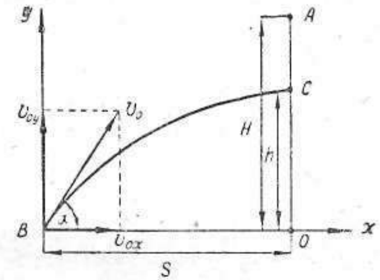


Рис. 9

а тело из точки B поднимется на высоту

$$h = v_{0y}t - \frac{gt^2}{2} = v_0 \sin\alpha \cdot t - \frac{gt^2}{2}.$$

Решая совместно последние два уравнения, находим

$$H = v_0 \sin\alpha \cdot t.$$

Подставляя значение t, имеем

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{H}{s},$$

т. е. угол бросания α не зависит от начальной скорости v_0, отсюда $\operatorname{tg}\alpha = \sqrt{3}$; $\alpha = 60°$.

19. С башни брошено тело в горизонтальном направлении со скоростью 40 *м/сек*. Какова скорость тела через 3 *сек* после начала движения? Какой угол образует с плоскостью горизонта вектор скорости тела в этот момент?

Дано:

$v_0 = 40$ *м/сек*;
$t = 3$ *сек*;
$g = 9{,}8$ *м/сек*^{2}.

α — ?

Решение

Тело одновременно движется равномерно в горизонтальном направлении со скоростью v_0 и находится в свободном падении со скоростью $v_c = gt$ (рис. 10). Численное значение скорости тела через время t после начала движения будет

$$v = \sqrt{v_0^2 + g^2t^2}\ ,$$

$$v = \sqrt{40^2\ м^2/сек^2 + 9{,}8^2\ м^2/сек^4 \cdot 3^2\ сек^2} \approx 50\ м/сек.$$

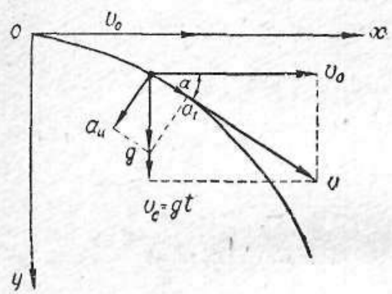


Рис. 10

Направление вектора скорости определяется углом α. Из рис. 10 видно, что

$$\cos\alpha = \frac{v_0}{v} = \frac{v_0}{\sqrt{v_0^2 + g^2t^2}},$$

$$\cos\alpha = \frac{40}{50} = 0{,}8;\quad \alpha \approx 37°.$$

20. С самолета, летящего со скоростью 720 *км/ч*, отделяется тело. Найти радиус кривизны в точке траектории, где оно будет через 5 *сек* после начала движения. Сопротивлением воздуха пренебречь.

Дано:

$v_0 = 720$ *км/ч* $= 200$ *м/сек*;
$t = 5$ *сек*;
$g = 9{,}8$ *м/сек*^{2}.

r — ?

Решение

Для определения радиуса кривизны в точке траектории через время t после начала движения воспользуемся формулой центростремительного ускорения

$$a_ц = \frac{v^2}{r},$$

откуда

$$r = \frac{v^2}{a_ц},$$

где v — скорость тела (см. рис. 10) через время t после начала движения. Из рис. 10 следует, что

$$\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{g}t$$

или

$$v = \sqrt{v_0^2 + g^2t^2}.$$

Направление вектора $\vec{v}$ определяется углом α:

$$\cos\alpha = \frac{v_0}{v} = \frac{v_0}{\sqrt{v_0^2 + g^2t^2}}.$$

Центростремительное ускорение численно равно (см. рис. 10):

$$a_ц = g\cos\alpha = \frac{gv_0}{\sqrt{v_0^2 + g^2t^2}}.$$

Подставив в формулу радиуса кривизны вместо v и $a_ц$ найденные значения, получим

$$r = \frac{v^2}{a_ц} = \frac{(v_0^2 + g^2t^2)^{\frac{3}{2}}}{gv_0},$$

$$r = \frac{(200^2\ м^2/сек^2 + 9{,}8^2\ м^2/сек^4 \cdot 5^2\ сек^2)^{\frac{3}{2}}}{9{,}8\ м/сек^2 \cdot 200\ м/сек} \approx 4500\ м = 4{,}5\ км.$$

21. С вершины горы бросают под углом 30° к горизонту камень с начальной скоростью 6 *м/сек* (рис. 11). Угол наклона горы к горизонту также составляет 30°. На каком расстоянии от точки бросания упадет камень?

Дано:

$\alpha = 30°$;
$v_0 = 6$ *м/сек*;
$g = 9{,}8$ *м/сек*^{2}.

s — ?

Решение

Движение камня по параболе можно рассматривать как сумму двух независимых прямолинейных движений. В данном случае в качестве составляющих движений удобно брать движения вдоль наклонной плоскости и перпендикулярно к ней. При таком рассмотрении оба составляющие движения прямолинейны и равнопеременны.

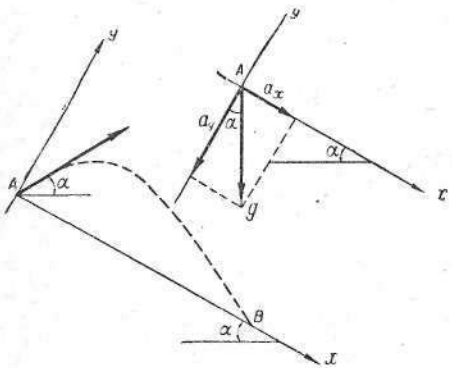


Рис. 11

Поместим начало координат в точке бросания, ось x направим параллельно наклонной плоскости вниз, ось y — перпендикулярно плоскости вверх. Как видно из рис. 11,

$$a_x = g \sin \alpha;$$
$$v_{0x} = v_0 \cos 2\alpha;$$
$$a_y = -g \cos \alpha;$$
$$v_{0y} = v_0 \sin 2\alpha.$$

На основании предыдущих выражений закон движения камня в выбранной системе координат можно записать так:

$$x = v_0 \cos 2\alpha \cdot t + \frac{g \sin \alpha \cdot t^2}{2};$$

$$y = v_0 \sin 2\alpha \cdot t - \frac{g \cos \alpha \cdot t^2}{2}.$$

Отсюда следует, что в точке падения камня — точке B — при $t = \tau$ $x = s$, $y = 0$ и

$$\tau = \frac{2v_0 \sin 2\alpha}{g \cos \alpha} = \frac{4v_0 \sin \alpha}{g}.$$

Подставив в уравнение

$$x = v_0 \cos 2\alpha \cdot t + \frac{g \sin \alpha \cdot t^2}{2}$$

значения $t = \tau$, $x = s$ и заменив τ предыдущим выражением, получим

$$s = \frac{4v_0^2 \sin \alpha}{g} (\cos 2\alpha + 2 \sin^2\alpha) = \frac{4v_0^2 \sin \alpha}{g}.$$

Произведем вычисления:

$$s = \frac{4 \cdot 36 \ м^2/сек^2 \cdot 0{,}5}{9{,}8 \ м/сек^2} \approx 7{,}3 \ м.$$

22. Найти угловую скорость блока (диаметр 10 *см*) машины Атвуда через 10 *сек* после начала движения грузов, если более тяжелый груз опустился за это время на 0,5 *м* (рис. 12).

Дано:

$r = \frac{d}{2} = 5 \ см = 0{,}05 \ м;$
$t = 10 \ сек;$
$s = 0{,}5 \ м.$
$\omega - ?$

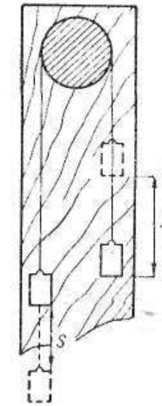


Рис. 12

Решение

Линейная скорость v какой-либо точки вращающегося тела, кратчайшее расстояние этой точки от оси вращения r и его угловая скорость ω связаны формулой

$$\omega = \frac{v}{r},$$

где r — кратчайшее расстояние от оси вращения до точки вращающегося тела.

Для определения ω необходимо найти только линейную скорость какой-либо точки обода блока.

Очевидно, линейная скорость точки обода блока в любой момент времени будет равна скорости движения грузов при отсутствии скольжения нити.

Так как грузы движутся под действием постоянной силы, равной разности весов грузов, то движение их будет равноускоренным. Поэтому скорость их, а следовательно, и скорость точек обода блока через t секунд после начала движения составит

$$v = at,$$

где a — ускорение, с которым движутся грузы.

Из выражения

$$s = \frac{at^2}{2}$$

найдем ускорение a:

$$a = \frac{2s}{t^2}.$$

Подставив в уравнение $v = at$ вместо a его значение, получим

$$v = \frac{2s}{t}.$$

Подставив это выражение в первое уравнение, найдем

$$\omega = \frac{2s}{rt}.$$

Произведем вычисления:

$$\omega = \frac{2 \cdot 0{,}5 \ м}{0{,}05 \ м \cdot 10 \ сек} = 2 \ сек^{-1}.$$

23. Определить скорость и ускорение точки, находящейся на поверхности Земли (в Минске), принимая во внимание только вращение Земли вокруг оси. Широта Минска — 54°, радиус Земли принять равным 6400 *км*.

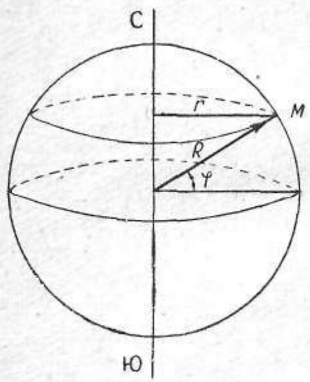


Рис. 13

Дано:

$R = 6400 \ км = 6{,}4 \cdot 10^6 \ м;$
$\varphi = 54°;$
$T = 24 \ ч = 86\,400 \ сек.$

v — ? a — ?

Решение

Для определения скорости v точки M воспользуемся формулой

$$v = \frac{2\pi r}{T},$$

где r — радиус окружности сечения земной сферы плоскостью, проходящей через точку M с широтой в 54° перпендикулярно к оси вращения Земли; T — время одного полного оборота Земли вокруг своей оси. Из рис. 13 видно, что $r = R\cos\varphi$ (R — радиус Земли; φ — угол, образованный радиусом Земли, проходящим через указанную точку M, с плоскостью экватора).

$$v = \frac{2\pi r}{T} = \frac{2\pi R\cos\varphi}{T},$$

$$v = \frac{2 \cdot 3{,}14 \cdot 6{,}4 \cdot 10^6 \ м \cdot 0{,}588}{86\,400 \ сек} \approx 274 \ м/сек.$$

Ускорение определяется по формуле

$$a = \frac{v^2}{r} = \frac{v^2}{R\cos\varphi},$$

$$a = \frac{274^2 \ м^2/сек^2}{6{,}4 \cdot 10^6 \ м \cdot 0{,}588} \approx 2 \cdot 10^{-2} \ м/сек^2.$$

24. Вал начинает вращаться равноускоренно. За первые 10 *сек* он делает 40 оборотов. Определить его угловую скорость к концу десятой секунды.

Дано:

$t = 10 \ сек;$
$n = 40.$

ω — ?

Решение

Для равноускоренного вращения угловая скорость $\omega = \beta t$, где β — угловое ускорение. Угол поворота вала за время t будет

$$\varphi = 2\pi n = \frac{\beta t^2}{2}.$$

Исключая ускорение β, получаем

$$\omega = \frac{4\pi n}{t}.$$

После подстановки численных значений

$$\omega = \frac{4 \cdot 3{,}14 \cdot 40}{10} \ сек^{-1} \approx 50 \ сек^{-1}.$$

ДИНАМИКА

25. На одно из оснований цилиндра (длина l и площадь основания S) действует постоянная сила F, перпендикулярная основанию (рис. 14). Какая сила действует на противоположное основание цилиндра? Какая сила действует на некоторое сечение цилиндра C, параллельное основанию? Движение тела под действием силы F происходит в среде без сопротивления.

Решение

Сила, действующая на сечение C, должна быть такой, чтобы в случае, если мы мысленно разрежем цилиндр по C, оставшаяся часть цилиндра CB продолжала двигаться с тем же ускорением, с каким двигался бы весь цилиндр AB под действием силы F.

Следовательно,

$$\frac{F}{M_{AB}} = \frac{F_C}{M_{CB}},$$

$$F_C = \frac{M_{CB}}{M_{AB}} \cdot F,$$

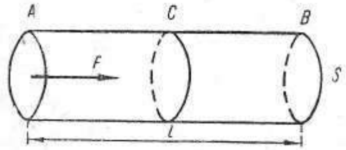


Рис. 14

где F_C — сила, действующая на сечение C; M_{AB} — масса всего тела; M_{CB} — масса части тела CB.

Если цилиндр однородный, то

$$F_C = \frac{CB}{AB} F,$$

и если

$$CB = \frac{AB}{2},$$

то

$$F_C = \frac{F}{2}.$$

Сила, приложенная к основанию цилиндра B, равна нулю.

26. Лыжник съезжает с вершины горы высотой 16 *м*. Внизу имеется впадина, представляющая часть дуги окружности радиусом 16 *м*. Найти (пренебрегая трением) кажущееся относительное увеличение веса своего тела, ощущаемое лыжником в нижней точке спуска с горы.

Дано:

$h = 16$ *м*;
$r = 16$ *м*.

F — ?

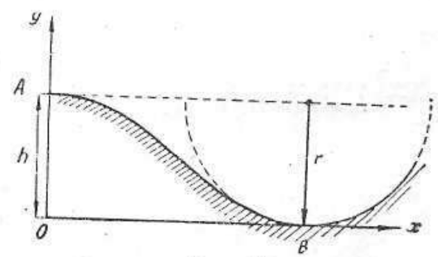


Рис. 15

Решение

Когда лыжник спускается с вершины горы A и достигает нижней точки B (рис. 15), то полная сила будет складываться из силы тяжести P и центробежной силы $F_{\text{цтр}}$, действующей на лыжника в результате движения его по окружности, причем обе силы по направлению совпадут, так что

$$F = P + F_{\text{цтр}},$$

где $P = mg$ и $F_{\text{цтр}} = \frac{mv^2}{r} = \frac{m \cdot 2gh}{r}$.

$$F = mg + \frac{2mgh}{r} = \left(1 + \frac{2h}{r}\right) P,$$

$$F = \left(1 + \frac{2 \cdot 15\ м}{15\ м}\right) P = 3\ P,$$

т. е. в 3 раза больше собственного веса лыжника.

27. Пуля массой 20 *г*, летящая с горизонтальной скоростью 500 *м/сек*, попадает в предмет, подвешенный на нити, и застревает в нем (рис. 16). Определить угол α, на который отклонится предмет, если его масса 5 *кг* и длина нити 5 *м*.

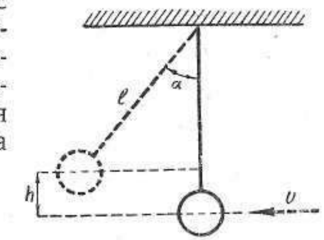


Рис. 16

Дано:

$m_1 = 20\ г = 0{,}02\ кг$;
$v = 500\ м/сек$;
$m_2 = 5\ кг$;
$l = 5\ м$.

α — ?

Решение

Для определения угла α, на который отклонится предмет после попадания в него пули, необходимо найти высоту h, на которую он поднимется:

$$h = \frac{u^2}{2g},$$

где u — скорость предмета и пули после соударения. Из рис. 16 следует, что

$$h = l - l\cos\alpha = l(1 - \cos\alpha).$$

Приравнивая правые части двух последних выражений, получим

$$\cos\alpha = 1 - \frac{u^2}{2gl}.$$

Из закона сохранения количества движения $m_1 v = (m_1 + m_2) u$ определим скорость предмета и пули после соударения:

$$u = \frac{m_1 v}{m_1 + m_2}.$$

Подставим в формулу для $\cos\alpha$ вместо u его значение:

$$\cos\alpha = 1 - \frac{(m_1 v)^2}{2g\,(m_1 + m_2)^2\, l},$$

$$\cos\alpha = 1 - \frac{(0{,}02 \cdot 500)^2\ кг^2 \cdot м^2/сек^2}{2 \cdot 9{,}8\ м/сек^2 \cdot 5{,}02^2 кг^2 \cdot 5\ м} = 0{,}996;\ \alpha \approx 5^\circ.$$

28. Мотоциклист движется по горизонтальному участку пути со скоростью 70,6 *км/ч*. В определенное время он начинает тормозить. Через 5 *сек* после начала торможения мотоцикл останавливается. Каков коэффициент трения колес мотоцикла о полотно дороги в момент торможения?

Дано:

$v_0 = 70{,}6\ км/ч = 19{,}6\ м/сек;$
$t = 5\ сек.$

k — ?

Решение

Согласно второму закону Ньютона,

$$mv - mv_0 = Ft,$$

где $v = 0$ — конечная скорость мотоцикла.

Мотоцикл останавливает сила трения

$$F = kP,$$

где k — коэффициент трения. Таким образом,

$$-mv_0 = -kPt \quad \text{или} \quad -\frac{P}{g} v_0 = -kPt.$$

Перед импульсом ставится знак минус потому, что сила трения направлена в противоположную сторону начальной скорости.

Коэффициент трения

$$k = \frac{v}{gt},\quad k = \frac{19{,}6\ м/сек}{9{,}8\ м/сек^2 \cdot 5\ сек} = 0{,}4.$$

29. На абсолютно гладкой горизонтальной плоскости лежит n связанных нитью равных грузов весом P каждый. Такой же $(n + 1)$-й груз, подвешенный вертикально, прикреплен к ним нитью, перекинутой через неподвижный блок. Определить ускорение, с которым движется система, а также натяжение нити между k-м и $(k + 1)$-м грузом. Сколько грузов надо взять, чтобы наибольшее натяжение было равно 0,9 P? Трение в блоке не учитывать.

Дать численный ответ на первые два вопроса задачи, если $n = 4$ и $k = 2$.

Решение

Движущей силой системы связанных нитью грузов является вес вертикально подвешенного груза. Ускорение движения системы будет во столько раз меньше ускорения свободного падения тел, во сколько раз масса одного груза меньше массы всей системы грузов, т. е.

$$\frac{a}{g} = \frac{m}{m(n+1)},$$

откуда

$$a = \frac{g}{n+1}.$$

Силу натяжения нити между k-м и $(k + 1)$-м грузом определяем по основному уравнению динамики

$$F = kma = \frac{kmg}{n+1} = \frac{kP}{n+1},$$

где P — вес одного груза.

Наибольшая сила натяжения нити будет между n-м и $(n + 1)$-м грузом, и по предыдущему выражению она равна

$$F_{\max} = \frac{nP}{n+1}.$$

Численные ответы при $k = 2$ и $n = 4$ следующие:

1) $a = \frac{g}{5}$, $a = 1{,}96\ м/сек^2$; 2) $F = 0{,}4\ P$;

3) $F_{\max} = 0{,}9P$; $0{,}9P = \frac{nP}{n+1}$; $\frac{n}{n+1} = \frac{9}{10}$, $n = 9$.

30. Какую силу тяги должен развить паровоз, чтобы поезд массой 1000 *т* через 2,5 *мин* после начала движения по горизонтальному пути приобрел скорость 54 *км/ч*, если коэффициент сопротивления во время движения равен 0,005? При решении задачи считать, что поезд в течение указанного времени двигался равноускоренно.

Дано:

$m = 1000\ т = 10^6\ кг;$
$t = 2{,}5\ мин = 150\ сек;$
$v = 54\ км/ч = 15\ м/сек;$
$k = 0{,}005;$
$g = 9{,}8\ м/сек^2.$

$F_{тяги}$ — ?

Решение

Общая сила тяги $F_{тяги}$ паровоза будет, очевидно, равна

$$F_{тяги} = F_1 + F_{тр},$$

где F_1 — часть силы тяги паровоза, сообщающая ускорение поезду, а $F_{тр}$ — часть силы тяги, идущая на преодоление силы сопротивления движению поезда.

Следовательно, для определения общей силы тяги паровоза необходимо определить F_1 и $F_{тр}$. Сила F_1, согласно второму закону Ньютона,

$$F_1 = ma,$$

где m — масса поезда; a — ускорение, сообщаемое поезду силой F_1.

Так как поезд двигался равноускоренно и через t секунд после начала движения приобрел скорость v, то ускорение

$$a = \frac{v}{t}.$$

Подставляя значение a в уравнение $F_1 = ma$, получим

$$F_1 = \frac{mv}{t}.$$

Сила тяги поезда, идущая на преодоление сопротивления, равна

$$F_{тр} = kP = kmg.$$

Общая сила тяги паровоза

$$F_{тяги} = \frac{mv}{t} + kmg = m\left(\frac{v}{t} + kg\right).$$

Подставив численные значения, получим

$$F_{тяги} = 10^6 кг\left(\frac{15\ м/сек}{150\ сек} + 0{,}005 \cdot 9{,}8\ м/сек^2\right) = 149 \cdot 10^3 н = 149\ кн.$$

31. Тело массой m движется вверх по вертикальной стене под действием силы F, направленной под углом α к вертикали (рис. 17). Определить, с каким ускорением движется тело, если коэффициент трения тела о стену равен k.

Решение

Разложим силу F на вертикальную и горизонтальную составляющие — F_1 и F_2. В горизонтальном направлении на тело будут действовать две равные и противоположно направленные силы: F_2 — составляющая силы F и Q — сила, с которой стена действует на тело. Сила, которая сообщает телу ускорение, есть равнодействующая сил F_1, P и силы трения $F_{тр}$. Тогда

$$ma = F_1 - P - F_{тр},$$

но

$$F_1 = F\cos\alpha;\ F_2 = F\sin\alpha;\ F_{тр} = kQ = kF_2 = kF\sin\alpha.$$

Подставляя значения F_1, P, $F_{тр}$, получим

$$ma = F\cos\alpha - mg - kF\sin\alpha,$$

откуда

$$a = \frac{F\cos\alpha - mg - kF\sin\alpha}{m}.$$

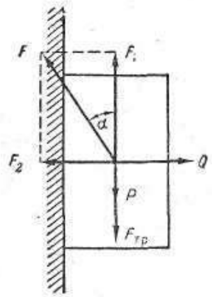


Рис. 17

Исследуем результат.

1. Если $\alpha = 0$, то $a = \frac{F - mg}{m}$. В этом случае трение отсутствует, так как тело не давит на стену.

2. Если $\alpha = \frac{\pi}{2}$, то $a = \frac{-mg - kF}{m}$. В этом случае движение возможно только вниз, так как вертикальная составляющая $F_1 = 0$; при этом сила трения $F_{тр} = kF$ будет направлена в сторону, противоположную скольжению, т. е. изменит знак, и выражение для ускорения следует записать так:

$$a = \frac{-mg + kF}{m} \quad \text{или} \quad -a = \frac{mg - kF}{m}.$$

Знак минус перед ускорением означает, что оно направлено вниз. Если еще при этом $mg = kF$, то $a = 0$, т. е. тело будет находиться в покое или равномерно скользить вниз.

3. Если $\alpha = \pi$, то

$$a = \frac{-F - mg}{m} \quad \text{или} \quad a = -\frac{F + mg}{m}.$$

В этом случае тело будет двигаться вниз под действием двух сил: силы тяжести и данной силы F, а ускорение его по абсолютной величине будет больше g.

32. Вагон под действием толчка, сообщенного ему паровозом, поднимался вверх по уклону в течение 30 *сек* и до остановки прошел путь, равный 64 *м*. После остановки вагон начал опускаться вниз по уклону и тот же путь прошел за 40 *сек*. Пользуясь этими данными, определить коэффициент трения k. При решении задачи считать постоянными k и угол уклона α (рис. 18).

Дано:

$t_1 = 30$ *сек*;
$s = 64$ *м*;
$t_2 = 40$ *сек*;
$g = 9,8$ *м/сек²*.
k — ?

Решение

При спуске вагона по уклону и при его подъеме действовали скатывающая сила

$$F_1 = mg \sin \alpha$$

и сила трения

$$F_{\text{тр}} = kmg \cos \alpha,$$

где m — масса вагона; g — ускорение силы тяжести; α — угол уклона.

Эти постоянные силы при спуске вагона направлены в противоположные стороны. Поэтому равнодействующая данных сил равна их разности, направлена параллельно уклону вниз и во время движения ввиду неизменности k и α будет постоянной. Под действием этой силы вагон при спуске будет двигаться равноускоренно. Ускорение вагона, сообщаемое ему действием указанной равнодействующей, будет равно a_2. Тогда, согласно второму закону Ньютона, можно написать

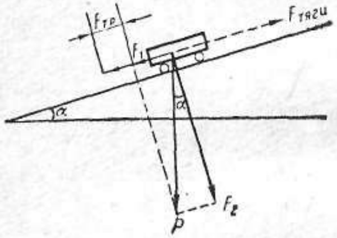


Рис. 18

$$F = F_1 - F_{\text{тр}} = mg \sin \alpha - kmg \cos \alpha = ma_2,$$

откуда

$$\sin \alpha - k \cos \alpha = \frac{a_2}{g}$$

и

$$k = \frac{g \sin \alpha - a_2}{g \cos \alpha}.$$

Для определения k необходимо знать угол уклона α и ускорение a_2. Найдем угол уклона α. При движении вагона вверх по уклону, как и при спуске, на него действовали те же силы F_1 и $F_{\text{тр}}$. Но в данном случае эти силы направлены в одну сторону — в сторону, противоположную движению вагона. Поэтому равнодействующая этих сил равна их сумме, направлена параллельно уклону вниз и будет оставаться во время движения постоянной. Если через a_1 обозначить ускорение вагона, сообщаемое ему этой равнодействующей, то по второму закону Ньютона

$$F' = F_1 + F_{\text{тр}} = mg \sin \alpha + kmg \cos \alpha = ma_1,$$

откуда

$$\sin \alpha + k \cos \alpha = \frac{a_1}{g}.$$

Решив данное уравнение и уравнение $\sin \alpha - k \cos \alpha = \frac{a_2}{g}$, найдем что

$$\sin \alpha = \frac{a_1 + a_2}{2g}.$$

Теперь найдем a_1 и a_2, которые необходимы для определения угла α и коэффициента k.

Так как при спуске вагон двигался равноускоренно и начал свое движение без начальной скорости, то данный в задаче путь s, пройденный за время t_2, равен

$$s = \frac{a_2 t_2^2}{2},$$

откуда

$$a_2 = \frac{2s}{t_2^2}.$$

Подставив численные значения, найдем

$$a_2 = \frac{2 \cdot 64 \text{ м}}{1600 \text{ сек}^2} = 0,08 \text{ м/сек}^2.$$

При подъеме вагона ускорение a_1 направлено в сторону, противоположную движению вагона. Поэтому при постоянстве a_1 это движение будет равнозамедленным. Следовательно, данный в задаче путь s, проходимый вагоном при его подъеме за t_1 *сек*, будет определяться выражением

$$s = v_0 t_1 - \frac{a_1 t_1^2}{2},$$

где v_0 — начальная скорость вагона.

Начальная и конечная скорости при равнозамедленном движении вагона, как известно, связаны уравнением

$$v_{t_1} = v_0 - a_1 t_1.$$

Так как конечная скорость v_{t_1} равна нулю, то

$$v_0 = a_1 t_1.$$

Вводя это значение v_0 в уравнение $s = v_0 t_1 - \frac{a_1 t_1^2}{2}$, получим

$$s = \frac{a_1 t_1^2}{2},$$

откуда

$$a_1 = \frac{2s}{t_1^2}.$$

Подставив численные значения, найдем

$$a_1 = \frac{2 \cdot 64 \text{ м}}{900 \text{ сек}^2} \approx 0{,}14 \text{ м/сек}^2.$$

Подставляя же найденные численные значения a_1 и a_2 в уравнение $\sin\alpha = \frac{a_1 + a_2}{2g}$, получим

$$\sin\alpha = \frac{0{,}14 \text{ м/сек}^2 + 0{,}08 \text{ м/сек}^2}{2 \cdot 9{,}8 \text{ м/сек}^2} \approx 0{,}011; \ \alpha \approx 40'.$$

Вводя численные значения $\sin\alpha = 0{,}011$, $a_2 = 0{,}08$ $м/сек^2$ в уравнение $k = \frac{g\sin\alpha - a_2}{g\cos\alpha}$ и принимая в нем $\cos\alpha \approx 1$, получим численное значение k:

$$k = \frac{9{,}8 \text{ м/сек}^2 \cdot 0{,}011 - 0{,}08 \text{ м/сек}^2}{9{,}8 \text{ м/сек}^2 \cdot 1} \approx 0{,}003.$$

33. Паровоз тянет вверх по уклону поезд массой 1000 *т* с постоянной скоростью 8 *м/сек*. Определить развиваемую паровозом мощность, если коэффициент сопротивления 0,003 и тангенс угла уклона равен 0,009.

Дано:

$m = 1000$ $т = 10^6$ $кг$;
$v = 8$ $м/сек$;
$k = 0{,}003$;
$tg\,\alpha = 0{,}009$.

N — ?

Решение

Мощность паровоза можно определить, пользуясь формулой

$$N = F_{тяги} v,$$

где $F_{тяги}$ — сила тяги паровоза, направление которой совпадает с направлением движения поезда; v — скорость поезда.

Для определения силы тяги необходимо найти силы, препятствующие движению поезда, т. е. силу сопротивления $F_{тр} = kF_2$ и скатывающую силу F_1. Сила же нормального давления F_2, как

и скатывающая сила F_1, обусловлена только действием силы тяжести поезда. Из рис. 18 видно, что F_1 и F_2 будут равны:

$$F_1 = P\sin\alpha = mg\sin\alpha$$

и

$$F_2 = P\cos\alpha = mg\cos\alpha.$$

Умножая F_2 на коэффициент сопротивления k, найдем, что

$$F_{тр} = kmg\cos\alpha.$$

Так как силы $F_{тр}$ и F_1 имеют одно и то же направление, противоположное движению поезда, то сила тяги паровоза будет

$$F_{тяги} = F_{тр} + F_1 = mg(k\cos\alpha + \sin\alpha).$$

Подставляя значение $F_{тяги}$ в уравнение $N = F_{тяги} v$, получим

$$N = mg(k\cos\alpha + \sin\alpha)v.$$

Подставляя численные значения P, k, $\sin\alpha = tg\,\alpha = 0{,}009$, $\cos\alpha \approx 1$, v, найдем

$$N = 10^6 кг \cdot 9{,}8 \text{ м/сек}^2 (0{,}003 + 0{,}009)\, 8 \text{ м/сек} \approx 9{,}4 \cdot 10^5 вт = 940 \text{ квт}.$$

34. Через конек крыши переброшен шнур, на концах которого имеются грузы с массами m_1 и m_2. С каким ускорением движется эта система грузов, если коэффициент трения грузов о крышу равен k? Углы ската крыши соответственно равны α и β (рис. 19).

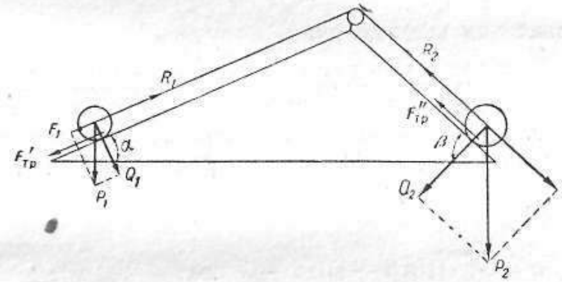


Рис. 19

Решение

Допустим, вся система грузов движется в сторону груза P_2. На первый груз действует скатывающая сила

$$F_1 = m_1 g\sin\alpha,$$

а также сила R_1 со стороны второго груза и сила трения $F'_{тр}$:

$$F'_{тр} = kQ_1 = km_1 g \cos\alpha.$$

На второй груз действует скатывающая сила

$$F_2 = m_2 g \sin\beta,$$

а также сила R_2 со стороны первого груза и сила трения $F''_{тр}$:

$$F''_{тр} = kQ_2 = km_2 g \cos\beta.$$

Запишем уравнения движения для первого и второго грузов:

$$m_1 a = R_1 - F_1 - F'_{тр};$$
$$m_2 a = F_2 - F''_{тр} - R_1 \ (R_1 = R_2),$$

откуда

$$R_1 = m_1 a + F_1 + F'_{тр}.$$

Подставляя вместо R_1 ее значение, получим

$$m_2 a = F_2 - F''_{тр} - m_1 a - F_1 - F'_{тр},$$

откуда следует, что

$$a = \frac{F_2 - F_1 - F''_{тр} - F'_{тр}}{m_1 + m_2}.$$

Подставляя значения всех величин, получаем

$$a = \frac{m_2 g \sin\beta - m_1 g \sin\alpha - km_2 g \cos\beta - km_1 g \cos\alpha}{m_1 + m_2}.$$

Зная ускорение, можно найти силу натяжения шнура. Движение может происходить и в противоположную сторону. Это зависит от величин углов и от масс грузов.

Если $m_1 = m_2$, то

$$a = \frac{g}{2}[\sin\beta - \sin\alpha - k(\cos\beta + \cos\alpha)].$$

В данном случае ускорение не будет зависеть от масс грузов. В частном случае ускорение может быть равно нулю.

35. Акробат весом 50 *кГ*, имея при себе груз 5 *кг*, прыгает под углом 60° к горизонту со скоростью 6 *м/сек*. В наивысшей точке своей траектории он бросает груз горизонтально назад с относительной скоростью 2 *м/сек* (рис. 20). На сколько увеличится дальность прыжка акробата вследствие этого?

Дано:

$P = 50$ *кГ* $= 490$ *н*;
$m = 5$ *кг*;
$\alpha = 60°$;
$v_0 = 6$ *м/сек*;
$v_1 = 2$ *м/сек*;
$g = 9{,}8$ *м/сек*^{2}.

Δs — ?

Решение

Увеличение дальности прыжка на величину Δs обусловлено возрастанием горизонтальной составляющей скорости гимнаста вследствие броска груза.

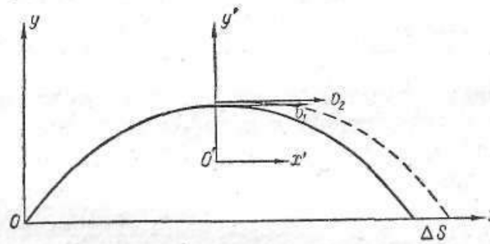


Рис. 20

Во время движения на систему гимнаст — груз действует внешняя сила — сила тяжести. Но в верхней точке траектории, т. е. в момент броска, скорости гимнаста и груза строго горизонтальны.

Следовательно, количество движения системы до и после броска будет постоянным, при этом следует предположить, что время броска ничтожно мало.

Задачу удобно решать в системе координат, движущейся со скоростью v_1, где $v_1 = v_0 \cos\alpha$ — горизонтальная составляющая скорости гимнаста до броска.

В системе координат, связанной с землей,

$$\Delta s = (u_1 - v_1)\,t,$$

где u_1 — горизонтальная составляющая скорости гимнаста после броска; t — время движения гимнаста от верхней точки траектории до земли.

На основании закона независимости движения $t=\sqrt{\frac{2h}{g}}$, $h=$ $=\frac{v_0^2\sin^2\alpha}{2g}$. Отсюда находим $t=\frac{v_0\sin\alpha}{g}$.

Для вычисления $\Delta v=u_1-v_1$ применяем закон сохранения количества движения в системе x', y', которая движется со скоростью v_1. В этой системе координат количество движения системы гимнаст — груз до броска $K_1=0$, после броска $K_2=M\Delta v-mv_1$, где M — масса гимнаста. Следовательно,

$$M\,\Delta v-mv_1=0,$$

$$\Delta v=\frac{mv_1}{M}.$$

Подставив в равенство $\Delta s=(u_1-v_1)t$ вместо $u_1-v_1=\Delta v$ и t их значения, получим

$$\Delta s=\frac{mv_1v_0\sin\alpha}{P},$$

$$\Delta s=\frac{5\ \textit{кг}\cdot 2\ \textit{м/сек}\cdot 6\ \textit{м/сек}\cdot 0{,}866}{490\ \textit{н}}\approx 0{,}1\ \textit{м}=1\ \textit{дм}.$$

36. На сколько следует на закруглении пути приподнять наружный рельс по отношению к внутреннему, если при скорости движения 54 *км/ч* и радиусе кривизны закругления 300 *м* давление на оба рельса одинаково? Ширина пути 1,524 *м*.

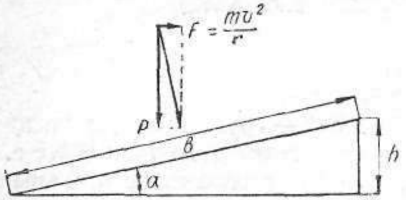


Рис. 21

Дано:

$v=54$ *км/ч* $=15$ *м/сек*;
$r=300$ *м*;
$b=1{,}524$ *м*.
h — ?

Решение

Из рис. 21 видно, что

$$h=b\sin\alpha.$$

С другой стороны,

$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{F}{P}=\frac{mv^2}{mgr}=\frac{v^2}{gr}.$$

Так как $\operatorname{tg}\alpha=\frac{\sin\alpha}{\sqrt{1-\sin^2\alpha}}$, то

$$\frac{\sin\alpha}{\sqrt{1-\sin^2\alpha}}=\frac{v^2}{gr}.$$

После преобразований получим

$$\sin\alpha=\frac{v^2}{\sqrt{r^2g^2+v^4}}.$$

Тогда

$$h=b\frac{v^2}{\sqrt{r^2g^2+v^4}}$$

или после подстановки численных значений

$$h=1{,}524\ \textit{м}\frac{15^2\ \textit{м}^2/\textit{сек}^2}{\sqrt{9\cdot 10^4\ \textit{м}^2\cdot 9{,}8^2\ \textit{м}^2/\textit{сек}^4+15^4\ \textit{м}^4/\textit{сек}^4}}\approx 1{,}16\cdot 10^{-2}\ \textit{м}.$$

37. Шарик массой 50 *г* вращается на резиновом шнуре, делая 180 оборотов в минуту. На сколько растягивается шнур при вращении?

Растяжение можно считать пропорциональным приложенной силе; под влиянием силы, равной 1 *кГ*, шнур растягивается на 1 *см*. Длина шнура в нерастянутом состоянии 30 *см*.

Дано:

$m=50$ *г* $=0{,}05$ *кг*;
$n=180$ *об/мин* $=3$ *об/сек*;
$k=1$ *кГ/см* $=980$ *н/м*;
$l=30$ *см* $=0{,}3$ *м*.
Δl — ?

Решение

Силу, растягивающую шнур, можно выразить на основании двух закономерностей: 1) $F=k\Delta l$ как упругая сила шнура, где $k=$ $=1$ *кГ/см* $=980$ *н/м* и Δl — удлинение шнура; 2) $F=4\pi^2(l+$ $+\Delta l)n^2m$ как центробежная сила при вращении.

На основании этих соотношений получаем

$$k\Delta l=4\pi^2n^2lm+4\pi^2n^2m\Delta l,$$

откуда

$$\Delta l=\frac{4\pi^2n^2lm}{k-4\pi^2n^2m},$$

$$\Delta l=\frac{4\cdot 3{,}14^2\cdot 9\cdot 0{,}3\cdot 0{,}05}{980-4\cdot 3{,}14^2\cdot 9\cdot 0{,}05}\approx 0{,}0055\ \textit{м}=5{,}5\ \textit{мм}.$$

38. Самолет, пролетающий над озером со скоростью, равной 252 *км/ч*, описывает в горизонтальной плоскости дугу радиусом

400 *м*. При этом плоскость крыльев самолета наклонена под определенным углом к плоскости горизонта. В самолете на столике стоит стакан с водой. Каково будет положение поверхности воды в стакане по отношению к столику и поверхности воды в озере?

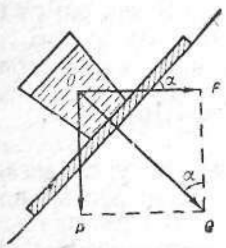


Рис. 22

Дано:

$v = 252$ *км/ч* $= 70$ *м/сек*;
$r = 400$ *м*;
$g = 9{,}8$ *м/сек²*.

α — ?

Решение

Когда самолет движется прямолинейно, сила тяжести стакана с водой P перпендикулярна поверхности столика. Когда самолет описывает дугу, на стакан с водой действует дополнительно центробежная сила F (рис. 22). Сила Q, прижимающая воду и стакан к столику, будет *равнодействующей центробежной силы F и силы* тяжести P. Она будет перпендикулярна к плоскости крыльев самолета и к поверхности столика. Поверхность воды в стакане займет положение, перпендикулярное равнодействующей силе Q. Так как плоскость крыльев самолета наклонена по отношению к плоскости воды в озере под углом α, то

$$F = P \cdot \operatorname{tg} \alpha,$$

где $F = \frac{mv^2}{r}$; $P = mg$ (m — масса стакана с водой; g — ускорение силы тяжести).

Подставляя в формулу $F = P \cdot \operatorname{tg}\alpha$ вместо F и P их значения, получим

$$\frac{mv^2}{r} = mg \cdot \operatorname{tg}\alpha,$$

откуда

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{v^2}{rg}.$$

Подставляя численные значения, находим

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{70^2\ м^2/сек^2}{400\ м \cdot 9{,}8\ м/сек^2} \approx 1{,}25;\ \alpha \approx 51°20'.$$

39. Шар массой m подвешен на нити длиной l. Его отклонили от положения равновесия до высоты точки подвеса и отпустили.

При каком значении угла α (угол между нитью и вертикалью) нить оборвется, если известно, что нить выдерживает удвоенный вес шара?

Решение

Шар в точке A (рис. 23) движется по окружности, радиус которой равен l. Роль центростремительной силы играет равнодействующее натяжение нити T и составляющая P_n веса шара, причем численно

$$P_n = P\cos\alpha.$$

Так как

$$\vec{F}_{цст} = \vec{T} + \vec{P}_n,$$

то

$$-\frac{mv^2}{l} = -T + mg\cos\alpha.$$

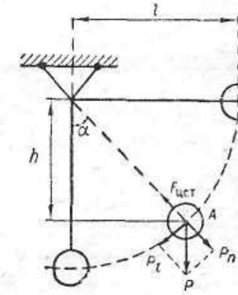


Рис. 23

При падении шара с высоты h его скорость равна

$$v = \sqrt{2gh}.$$

Из чертежа находим

$$h = l\cos\alpha,$$

откуда

$$v^2 = 2gl\cos\alpha.$$

Подставляя в уравнение $-\frac{mv^2}{l} = -T + mg\cos\alpha$ значение v^2 и учитывая, что $T = 2P = 2mg$, получаем

$$-2mg\cos\alpha = -2mg + mg\cos\alpha$$

или

$$2 = 3\cos\alpha,$$

откуда

$$\cos\alpha = \frac{2}{3};\ \alpha = 48°10'.$$

40. На конце горизонтального стержня, вращающегося вокруг вертикальной оси, закреплена U-образная трубка в следующих двух *положениях: 1) плоскость трубки проходит через ось вращения;* 2) оба колена трубки находятся на одинаковом расстоянии от оси вращения.

Каково положение уровней жидкости в обоих коленах трубки, если стержень вращается с числом оборотов n в секунду?

Решение

1. В первом случае можно заметить разность уровней жидкости в обоих коленах вращающейся трубки (рис. 24). Одновременно наступает изменение мениска в трубке (мениск — свободная поверх-

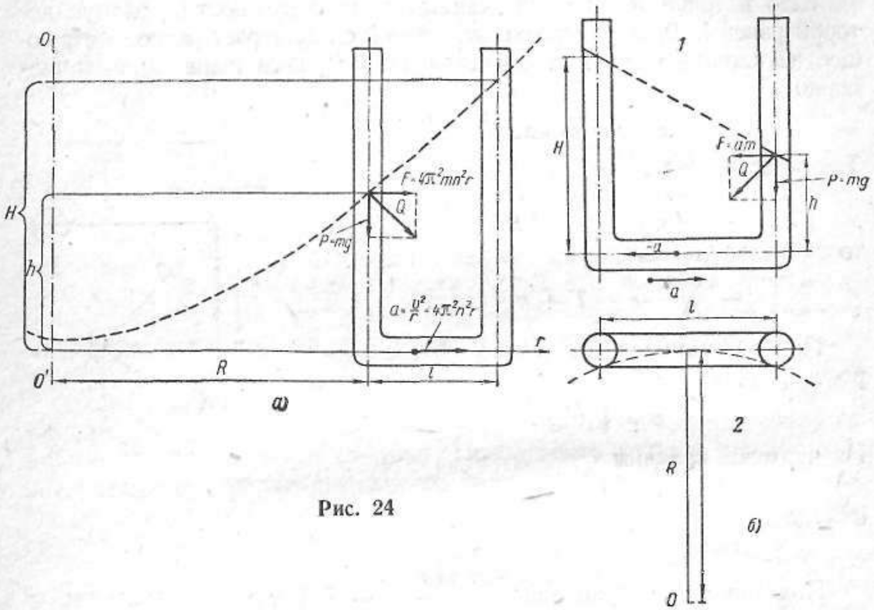


Рис. 24

ность жидкости в трубке). Обращает на себя внимание, что мениск в одном колене трубки становится продолжением мениска в другом колене. Разность уровней в трубке растет с увеличением угловой скорости или числа оборотов. Она обусловлена действием центробежной силы на жидкость, находящуюся в горизонтальной части трубки. В результате действия этой силы жидкость расположится так, как показано на рис. 24, *а*.

При отсутствии вращения мениск уровня жидкости в сосуде всегда перпендикулярен к направлению действия силы тяжести P. В нашем случае, кроме силы тяжести P, действует еще центробежная сила F. Вследствие этого уровень жидкости расположится перпендикулярно к равнодействующей сил P и F, т. е. под неко-

торым углом к горизонтальной плоскости. Наклон мениска создает разность уровней в обоих коленах трубки. В положении (*2*) дополнительная сила F одинакова в обоих коленах, отсюда и одинаковый наклон мениска. В положении (*1*) дополнительная сила F растет с удалением от оси вращения. Вследствие этого, если бы цилиндрический сосуд вращался вокруг оси OO', то мениск установился бы по параболе, показанной пунктирной линией (рис. 24, *а*).

Подсчитаем разность уровней жидкости в обоих коленах трубки.

Как известно, центростремительное ускорение можно выразить следующим образом:

$$a = 4\pi^2 n^2 r,$$

где n — число оборотов в секунду; r — расстояние от оси вращения.

Так как ускорение зависит от оси вращения, то для расчета силы, действующей на жидкость, расположенную в вертикальной части трубки, следовало бы столбик жидкости разбить на участки, подсчитать силу, действующую на каждый такой участок, а затем просуммировать все отдельные силы. Мы упростим решение, взяв среднее значение силы.

Наименьшее и наибольшее ускорения соответственно равны:

$$a_{\min} = 4\pi^2 n^2 R \text{ и } a_{\max} = 4\pi^2 n^2 (R + l).$$

Среднее ускорение

$$a_{\text{ср}} = \frac{1}{2}(a_{\max} + a_{\min}) = 2\pi^2 n^2 (2R + l).$$

На жидкость действует центробежная сила

$$F = ma_{\text{ср}} = 2\pi^2 n^2 (2R + l) Sl\rho,$$

где l — длина; S — поперечное сечение горизонтальной части трубки; ρ — плотность жидкости.

Центробежная сила уравновешена силой гидростатического давления, возникающей за счет разности уровней жидкости в обоих коленах трубки:

$$p_1 = (H - h)\rho g S.$$

Тогда

$$p_1 = F \text{ или } (H - h)\rho g S = 2\pi^2 n^2 (2R + l) Sl\rho,$$

откуда

$$\Delta h = H - h = \frac{2\pi^2 n^2 l}{g}(2R + l).$$

Оказывается, разность уровней в большой степени зависит от числа оборотов и длины горизонтальной части трубки и значительно слабее — от расстояния до оси вращения.

Если расстояние внешнего колена от оси вращения обозначим через R_1, т. е. $R_1 = R + l$, то формулу можно несколько упростить:

$$\Delta h = H - h = \frac{2\pi^2}{g} n^2 (R_1^2 - P_2^2).$$

2. Когда трубка вращается равномерно, уровень жидкости в обоих коленах одинаков. Если же трубка вращается с угловым ускорением ε, то легко показать, что разность уровней выражается формулой

$$\Delta h = \frac{\varepsilon l R}{g}.$$

Формула справедлива, если $l \ll R$.

41. Воронка с углом растворения 120° вращается вокруг вертикальной оси со скоростью 2 *об/сек*. В каком месте на внутренней стороне воронки должно находится тело, чтобы оно было в равновесии?

Дано:

$2\alpha = 120°$;
$n = 2$ *об/сек*;
$g = 9{,}8$ *м/сек*^{2}.

l — ?

Решение

Пусть тело в положении равновесия находится на расстоянии r от оси вращения. В процессе вращения на тело действуют центробежная сила F и сила тяжести P. Обе силы разлагаются на составляющие (рис. 25). При отсутствии трения тело находится в равновесии, когда скатывающая сила P_1 равна составляющей F_1 центробежной силы F.

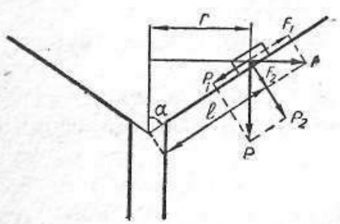


Рис. 25

Центробежная сила

$$F = m\omega^2 r = 4\pi^2 m n^2 r = 4\pi^2 m n^2 l \sin\alpha,$$

так как $r = l \sin\alpha$.

Из рис. 25 видно, что

$$P_1 = P\cos\alpha;$$
$$F_1 = F\sin\alpha.$$

Тогда $P\cos\alpha = F\sin\alpha$ или

$$mg\cos\alpha = 4\pi^2 m n^2 l \sin^2\alpha,$$

откуда

$$l = \frac{g\cos\alpha}{4\pi^2 n^2 \sin^2\alpha}.$$

Подставляя численные значения, получим

$$l = \frac{9{,}8\ м/сек^2 \cdot 4}{2\cdot 4\cdot 3{,}14^2\cdot 4\ сек^{-2}\cdot 3} = 0{,}04\ м = 4\ см.$$

Положение будет неустойчивым, если $P_1 > F_1$, тело скатывается вниз, вследствие чего равновесие еще больше нарушается, и не возвращается в свое первоначальное положение. При $F_1 > P_1$ тело будет выброшено из воронки.

С учетом коэффициента трения условие равновесия запишется в следующем виде:

$$P_1 - F_1 \leqslant F_{тр};$$
$$F_1 - P_1 \leqslant F_{тр}.$$

Сила трения равна

$$F_{тр} = k(4\pi^2 m n^2 l \sin\alpha\cos\alpha + mg\sin\alpha) = km\sin\alpha(4\pi^2 n^2 l\cos\alpha + g).$$

Подставляя известные значения в неравенства

$$P_1 - F_1 \leqslant F_{тр};\ F_1 - P_1 \leqslant F_{тр},$$

найдем:

$$mg\cos\alpha - 4\pi^2 m n^2 l \sin^2\alpha \leqslant km\sin\alpha(4\pi^2 n^2 l\cos\alpha + g);$$
$$4\pi^2 m n^2 l \sin^2\alpha - mg\cos\alpha \leqslant km\sin\alpha(4\pi^2 n^2 l\cos\alpha + g),$$

откуда

$$\frac{g}{4\pi^2 n^2}\cdot\frac{\operatorname{ctg}\alpha - k}{\sin\alpha + k\cos\alpha} \leqslant l \leqslant \frac{g}{4\pi^2 n^2}\cdot\frac{k + \operatorname{ctg}\alpha}{\sin\alpha - k\cos\alpha}.$$

Следовательно,

$$l_{\min} = \frac{g}{4\pi^2 n^2}\cdot\frac{\operatorname{ctg}\alpha - k}{\sin\alpha + k\cos\alpha};$$
$$l_{\max} = \frac{g}{4\pi^2 n^2}\cdot\frac{\operatorname{ctg}\alpha + k}{\sin\alpha - k\cos\alpha}.$$

Тело находится в равновесии внутри воронки на расстоянии от $l_{\min}$ до $l_{\max}$.

42. Ребенок бросает обруч, одновременно сообщая ему вращение в направлении стрелки (рис. 26, *а*). При каком соотношении между линейной и угловой скоростями обруч покатится обратно к бросавшему? Сопротивлением воздуха пренебречь.

Решение

Во время полета обруч сохраняет как линейную, так и угловую скорость. В момент приземления обруч будет некоторое время двигаться со скольжением, вращаясь против часовой стрелки и скользя вправо (рис. 26, *б*). Сила трения F (величина которой роли не играет)

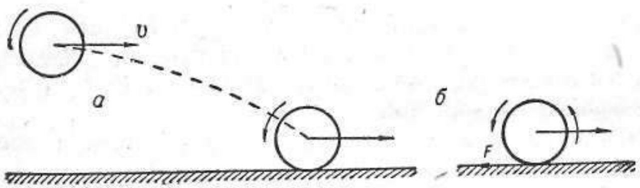


Рис. 26

будет постепенно уменьшать линейную скорость v, причем замедление (линейное) будет равно

$$a = \frac{F}{m},$$

где m — масса обруча.

Та же сила, момент которой $M = Fr$ относительно центра обруча (где r — радиус обруча), вызовет и угловое замедление вращения

$$\varepsilon = \frac{M}{I} = \frac{Fr}{mr^2} = \frac{F}{mr},$$

где $I = mr^2$ — момент инерции обруча.

Для того чтобы обруч покатился назад, необходимо, чтобы линейная скорость уменьшилась до нуля раньше, чем угловая, т. е. чтобы $t_1 < t_2$, где t_1 — время уменьшения до нуля линейной, а t_2 — угловой скорости.

Но

$$t_1 = \frac{v}{a} = \frac{mv}{F}, \text{ а } t_2 = \frac{\omega}{\varepsilon} = \frac{\omega mr}{F},$$

откуда $t_1 < t_2$, т. е. $v < \omega r$. При соотношении $v < \omega r$ обруч покатится обратно к бросавшему.

СТАТИКА

43. Определите, где находится центр тяжести однородной пластинки с вырезом. Все размеры в сантиметрах указаны на рис. 27, *а*.

Решение

Если пластинка не имеет выреза, то ее центр тяжести расположен в точке O. Пусть P_1 — вес пластинки с вырезом, а P_2 — вес вырезанной части. Вес всей пластинки P можно рассматривать как сумму весов P_1 и P_2. Таким образом, задача сводится к нахождению точки приложения двух антипараллельных сил P_1 и P_2 (рис. 27, *б*).

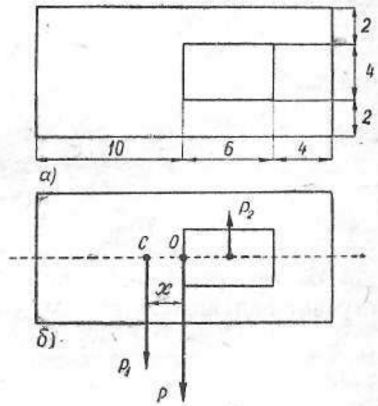


Рис. 27

Пользуясь рисунком, можно написать, что

$$\frac{x}{x+3} = \frac{P_2}{P}.$$

Вес однородной пластинки пропорционален ее площади, поэтому

$$\frac{x}{x+3} = \frac{6 \cdot 4}{20 \cdot 8},$$

откуда $x = 0{,}53$ *см*.

44. Из однородной круглой пластинки радиусом 18 *см* вырезан круг вдвое меньшего радиуса, касающийся края первого круга. Найти центр тяжести полученной пластинки (рис. 28).

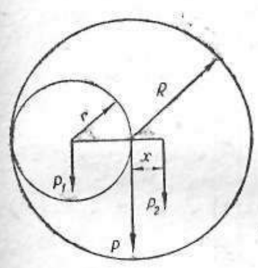


Рис. 28

Дано:

$R = 18$ *см*;

$r = \frac{1}{2} R = 9$ *см*.

x — ?

Решение

Пусть вес большого круга P, а вес вырезанной части P_1. Тогда вес оставшейся части большого круга будет равен $P_2 = P - P_1$.

Так как $P = mg = \rho ghS = \rho gh\pi R^2$, а $P_1 = \rho gh\pi r^2 = \rho gh\pi\frac{1}{4}R^2$, то отсюда следует, что $P_1 = \frac{1}{4}P$. Следовательно, $P_2 = P - P_1 = \frac{3}{4}P$.

Центр тяжести полученной пластинки найдем из условия равенства моментов:

$$P_1 r = P_2 x,$$

откуда

$$x = \frac{P_1}{P_2}r, \quad x = \frac{\frac{1}{4}P}{\frac{3}{4}P}\cdot 9\ см = 3\ см.$$

45. Выкладывая карниз из камня, каменщик кладет один на другой четыре кирпича так, что часть вышележащего кирпича выступает над нижележащим (рис. 29, *а*). Длина каждого кирпича l.

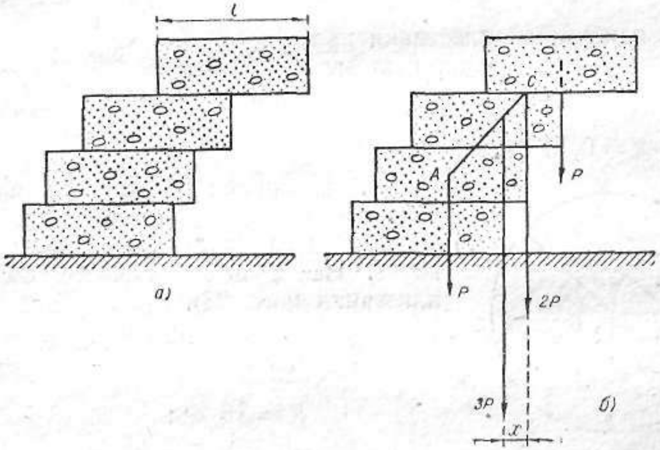


Рис. 29

Определить наибольшие длины выступающих частей кирпичей, при которых кирпичи в карнизе будут без цементного раствора еще находиться в равновесии.

Решение

Так как кирпичи однородны, то центр тяжести каждого кирпича находится на середине его длины. Вследствие этого самый верхний кирпич будет находиться в равновесии по отношению к лежащему под ним, если его центр тяжести лежит на продолжении линии среза второго кирпича, т. е. наибольшая длина свеса первого кирпича $\frac{l}{2}$.

Центр тяжести первого и второго кирпичей, взятых вместе, будет расположен на расстоянии $\frac{l}{4}$ от внешнего края второго кирпича. На эту длину и можно свесить второй кирпич, чтобы он и первый кирпич еще находились в равновесии по отношению к третьему кирпичу.

Относительно правого верхнего края самого нижнего кирпича два самых верхних кирпича будут создавать вращательный момент $2Px$ (рис. 29, *б*). Третий кирпич от верха будет создавать вращательный момент противоположного знака, равный $P\left(\frac{l}{2} - x\right)$. Условие равновесия будет выполнено, если $2Px = P\left(\frac{l}{2} - x\right)$. Отсюда $x = \frac{l}{6}$, т. е. третий кирпич может выступать над четвертым не более чем на $^1/_6$ своей длины.

46. Человек весом 60 *кГ* стоит на балке весом 30 *кГ*, подвешенной на блоках (рис. 30). Длина балки между точками опоры 3 *м*. Определить, какую силу должен приложить человек и в каком месте он должен встать, чтобы балка находилась в равновесии и занимала горизонтальное положение.

Рис. 30

Дано:

$P = 60\ кГ = 588\ н;$
$P_1 = 30\ кГ = 294\ н;$
$l = 3\ м.$

F — ? AC — ?

Решение

Пусть F — сила, с которой человек действует на веревку. Тогда сила, действующая на балку в точке B, должна быть также F, а в точке A — $2F$. В точке C на балку действует человек с силой $P-F$. Сумма всех сил, действующих на балку в положении равновесия, должна быть равна нулю.

Отсюда

$$2F+F-(P-F)-P_1=0$$

или

$$F=\frac{P+P_1}{4}.$$

$$F=\frac{588\ н+294\ н}{4}\approx 220\ н.$$

Место человека на балке определяем из правила моментов

$$2F\cdot AC+P_1\cdot OC=F\cdot BC.$$

Принимая во внимание, что

$BC=l-AC$, $OC=\frac{1}{2}l-AC$, находим

$$AC=\frac{P-P_1}{3P-P_1}l,$$

$$AC=\frac{588\ н-294\ н}{3\cdot 588\ н-294\ н}3\ м=0{,}6\ м.$$

47. В некоторой точке Земли магнитная стрелка, вращающаяся вокруг горизонтальной оси, установилась под углом 60° к горизонту

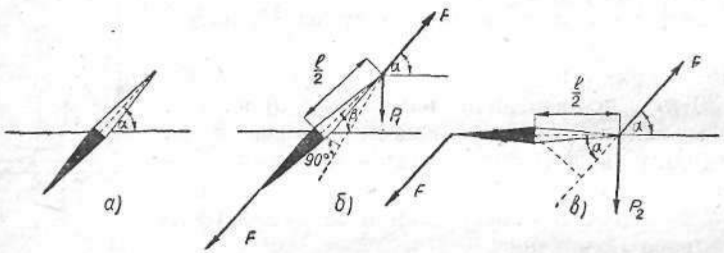


Рис. 31

(рис. 31, *а*). Если к верхнему концу стрелки прикрепить гирьку массой в 1 *г*, то угол наклона уменьшится до 30° (рис. 31, *б*). Какую гирьку надо прикрепить к стрелке, чтобы она заняла горизонтальное положение?

Дано:

$m_1=1\ г=10^{-3}\ кг;$
$\alpha=60°;$
$\beta=30°;$
$g=9{,}8\ м/сек^2.$

m_2 — ?

Решение

Так как стрелка находится в равновесии, моменты сил, действующие на нее, равны. Напишем равенства, когда стрелка наклонена под углом β к горизонту (рис. 31, *б*):

$$2F\frac{l}{2}\sin(\alpha-\beta)=P_1\frac{l}{2}\cos\beta$$

и когда она расположена горизонтально (рис. 31, *в*):

$$2F\frac{l}{2}\sin\alpha=P_2\frac{l}{2},$$

где F — сила магнитного взаимодействия стрелки с магнитным полем Земли; l — длина стрелки. Исключая силу F, получим

$$P_2=\frac{P_1\cos\beta\sin\alpha}{\sin(\alpha-\beta)}=\frac{m_1g\cos\beta\sin\alpha}{\sin(\alpha-\beta)},$$

откуда

$$m_2=\frac{P_2}{g}=\frac{m_1\cos\beta\sin\alpha}{\sin(\alpha-\beta)},$$

$$m_2=\frac{10^{-3}\ кг\cdot 0{,}866\cdot 0{,}866}{0{,}5}=1{,}5\cdot 10^{-3}\ кг=1{,}5\ г.$$

48. На деревянном полу стоит маленькая лестница. Посредине она связана веревкой. Веревка разрывается при действии на нее силы 10 *кГ*. Определить, при каком угле при вершине лестницы веревка разорвется, если на верхней ступени лестницы стоит человек весом 70 *кГ* (коэффициент трения дерева о дерево 0,65). Вес лестницы не учитывать.

Дано:

$F=10\ кГ=98\ н;$
$P=70\ кГ=686\ н;$
$k=0{,}65.$

β — ?

50. Три одинаковых цилиндра уложены, как показано на рис. 34. При каких условиях они будут удерживаться в этом положении неподвижно?

Решение

Все три цилиндра останутся неподвижными в положении, приведенном на рис. 34, если цилиндры *2* и *3* не будут ни катиться, ни скользить по плоскости опоры.

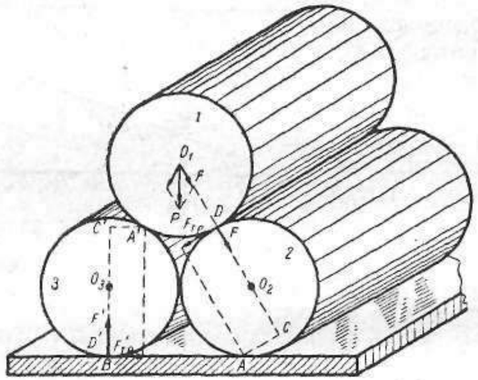


Рис. 34

Чтобы любой из нижних цилиндров не катился по плоскости опоры, необходимо следующее: сумма моментов действующих на цилиндр сил относительно оси опоры A должна быть равна нулю. Применительно к цилиндру *2*, например, это условие записывается так:

$$F_{тр} \cdot AB - F \cdot AC = 0.$$

Отсюда

$$k = \frac{F_{тр}}{F} = \frac{AC}{AB} = \frac{r \sin 30^\circ}{r + r \cos 30^\circ} = 2 - \sqrt{3}.$$

Таким образом, цилиндры *2* и *3* не будут катиться по плоскости опоры, если коэффициент трения k между цилиндрами не меньше $2-\sqrt{3}$; это является вместе с тем условием отсутствия скольжения между цилиндром *1*, с одной стороны, и цилиндрами *2* и *3*, с другой.

Если неравенство $k \geqslant 2-\sqrt{3}$ выполняется, то цилиндры *2* и *3* (чтобы не было их скольжения по плоскости опоры) не должны совершать поворота относительно линий соприкосновения с цилиндром *1*. Для этого сумма моментов сил, действующих на цилиндр *2* или *3* относительно осей D' или A' (соответственно), должна равняться нулю. Применительно к цилиндру *3*, например, это условие записывается так:

$$F'_{тр} \cdot A'B' - F' \cdot A'C' = 0.$$

Отсюда

$$k' = \frac{F'_{тр}}{F'} = \frac{A'C'}{A'B'} = \frac{r \sin 30^\circ}{r + r \cos 30^\circ} = 2 - \sqrt{3}.$$

Это значит, что цилиндры *2* и *3* не будут скользить по плоскости опоры, если коэффициент трения k' между этими цилиндрами, с одной стороны, и плоскостью опоры, с другой, не меньше $2-\sqrt{3}$.

Итак, все три цилиндра будут неподвижно удерживаться в положении, указанном на рис. 34, если коэффициенты трения покоя между цилиндром *1*, с одной стороны, и цилиндрами *2* и *3*, с другой, а также между цилиндрами *2* и *3* и плоскостью опоры не менее чем $2-\sqrt{3}$.

РАБОТА И ЭНЕРГИЯ

51. Можно ли совершить 5 *кГм* работы при однократном подъеме килограммовой гири на высоту 1 *м*?

Решение

Можно, прилагая к гире силу 5 *кГ*, т. е. поднимая ее с ускорением; при этом 1 *кГм* работы пойдет на пополнение запаса потенциальной энергии, а остальные 4 *кГм* перейдут в кинетическую энергию.

52. Для откачки нефти из скважины глубиной 500 *м* поставлен насос мощностью 10 *квт*. Коэффициент полезного действия насоса 80%. Какова добыча нефти за 5 часов работы насоса?

Дано:

$h = 500$ *м*;
$N = 10$ *квт* $= 10^4$ *вт*;
$\eta = 0{,}8$;
$t = 5$ *ч* $= 18\,000$ *сек*.

P — ?

Решение

Вес нефти можно найти из формулы работы. Полезная работа

$$A_{пол} = Ph.$$

Затраченная работа

$$A_з = Nt.$$

Тогда

$$\eta = \frac{Ph}{Nt} \text{ и } P = \frac{\eta Nt}{h}.$$

Подставив численные значения, получим

$$P = \frac{0{,}8 \cdot 10^4 \text{ вт} \cdot 18\,000 \text{ сек}}{500 \text{ м}} = 288 \cdot 10^3 \text{ н} \approx 29{,}4 \text{ Т}.$$

53. Продолжительность свободного падения тела вдоль наклонной плоскости, образующей с горизонтом угол 60°, равна 2 *сек*.

Как надо изменить угол наклона плоскости (оставив высоту неизменной), чтобы увеличить продолжительность падения в 2 раза? Как при этом изменится величина скорости в конце длины наклонной плоскости? Как изменится величина горизонтальной составляющей скорости?

Рассмотреть случаи идеально гладкой плоскости, пренебрегая сопротивлением среды.

Решение

Решение задачи необходимо начинать со второго вопроса. Для идеально гладкой плоскости, если пренебречь сопротивлением среды, на основании закона сохранения и превращения механической энергии скорости в конце длины наклонной плоскости при одной и той же высоте в обоих случаях будут одинаковы (потенциальная энергия полностью превращается в кинетическую), т. е.

$$mgh = \frac{mv_1^2}{2}, \quad mgh = \frac{mv_2^2}{2},$$

$$\frac{mv_1^2}{2} = \frac{mv_2^2}{2}, \quad v_1 = v_2.$$

Выражая далее эти скорости по формуле $v = at$ и принимая ускорение при движении по наклонной плоскости без учета трения равным $g \sin \alpha$, получим

$$g \sin \alpha_1 \cdot t_1 = g \sin \alpha_2 \cdot t_2,$$

где по условию $2t_1 = t_2$.

Тогда

$$\sin \alpha_1 = 2 \sin \alpha_2,$$

$$\sin \alpha_2 = \frac{\sin 60°}{2},$$

$$\sin \alpha_2 = \frac{0{,}866}{2} = 0{,}433; \quad \alpha_2 = 25°40';$$

$$\alpha_2 < \alpha_1.$$

Решение этого вопроса может быть иное ввиду отсутствия у учащихся соответствующих знаний по математике:

$$a = g\frac{h}{l}; \quad g\frac{h}{l_1}t_1 = g\frac{h}{l_2}2t_1,$$

откуда

$$l_2 = 2l_1.$$

Физический смысл полученного ответа следующий: при одной и той же высоте наклонной плоскости и при большей ее длине угол наклона меньше, а продолжительность свободного падения тела больше.

Ответ на последний вопрос задачи получаем, разлагая скорость движения на горизонтальную и вертикальную составляющие (рис. 35):

$$v_2 = v\frac{b}{l} = v \cos \alpha.$$

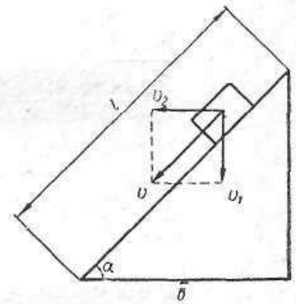


Рис. 35

54. Вагон под действием некоторой силы движется с постоянной скоростью 4 *м/сек* по горизонтальному пути с коэффициентом трения 0,002. Затем вагон переходит на участок пути с коэффициентом трения 0,003. Какой путь пройдет вагон до остановки?

Дано:

$v_0 = 4$ *м/сек*;
$k_0 = 0{,}002$;
$k = 0{,}003$.

s — ?

Решение

На участке пути с коэффициентом трения k_0 сила F, действующая на вагон, уравновешивается силой трения, т. е.

$$F = k_0 P.$$

Запишем закон сохранения энергии для второго участка пути:

$$\frac{mv^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2} = k_0 Ps - kPs.$$

Конечная скорость вагона $v = 0$. Знак минус перед kPs означает, что угол между силой трения и направлением движения 180°, а $\cos 180° = -1$.

Таким образом,

$$s = \frac{v_0^2}{2g(k - k_0)}, \quad s = \frac{16 \ м^2/сек^2}{2 \cdot 9{,}8 м/сек^2 \cdot 0{,}001} \approx 820 \ м.$$

55. Из винтовки сделано в горизонтальном направлении два выстрела в щит, находящийся на расстоянии 50 *м*. После первого выстрела перед дулом винтовки поставили доску. Вторая пуля, пробив доску, попала в щит на 0,49 *м* ниже первой. Какая работа совершена пулей при пробивании доски, если начальная скорость пули 300 *м/сек*? Масса пули 5 *г*.

Дано:

$s = 50 \ м;$
$h = 0{,}49 \ м;$
$v_1 = 300 \ м/сек;$
$m = 5 \ г = 5 \cdot 10^{-3} \ кг;$
$g = 9{,}8 \ м/сек^2.$

$A - ?$

Решение

Работа, совершенная пулей при пробивании доски (рис. 36), равна разности кинетических энергий пули до пробивания и после пробивания доски:

$$A = \frac{mv_1^2}{2} - \frac{mv_2^2}{2},$$

где m — масса пули; v_2 — скорость пули после пробивания доски.

Используя формулу равноускоренного движения

$$h = \frac{gt^2}{2},$$

определим время полета пули между доской и щитом

$$t = \sqrt{\frac{2h}{g}}.$$

Скорость пули

$$v_2 = \frac{s}{t} = \frac{s}{\sqrt{\frac{2h}{g}}}.$$

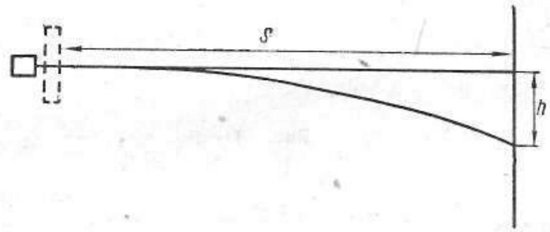


Рис. 36

Подставив полученное значение v_2 в формулу для определения работы, получим

$$A = \frac{mv_1^2}{2} - \frac{ms^2 g}{2 \cdot 2h} = \frac{m}{2}\left(v_1^2 - \frac{s^2 g}{2h}\right),$$

$$A = \frac{5 \cdot 10^{-3} \ кг}{2}\left(90\,000 \ м^2/сек^2 - \frac{2500 \ м^2 \cdot 9{,}8 \ м/сек^2}{2 \cdot 0{,}49 \ м}\right) \approx 162 \ дж.$$

56. Автомобиль движется с постоянной скоростью 72 *км/ч*. У подножья горы водитель выключил мотор. Наклон горы 5 *м* на 1 *км* пути. Коэффициент трения 0,05. На какое расстояние автомобиль поднимется в гору?

Дано:

$v = 72 \ км/ч = 20 \ м/сек;$
$h = 5 \ м;$
$l = 1 \ км = 1000 \ м;$
$k = 0{,}05.$

$s - ?$

Решение

У подножья горы автомобиль обладает запасом кинетической энергии $\frac{mv^2}{2}$, которая пойдет на сообщение автомобилю потенциальной энергии при подъеме в гору mgh и на преодоление сил трения $F_{\text{тр}}s$ (рис. 37, а), т. е.

$$\frac{mv^2}{2} = mgh + F_{\text{тр}}s,$$

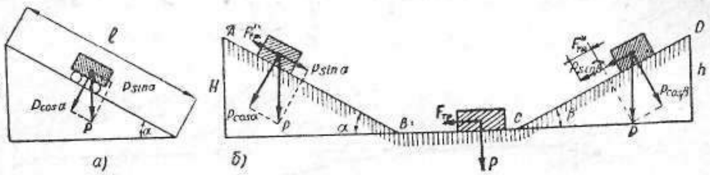


Рис. 37

где $h = s\sin\alpha = \frac{sh}{l}$ и $F_{\text{тр}} = kmg\cos\alpha = kmg\frac{\sqrt{l^2-h^2}}{l}$.

Таким образом,

$$\frac{mv^2}{2} = mgs\frac{h}{l} + kmgs\frac{\sqrt{l^2-h^2}}{l},$$

откуда

$$s = \frac{lv^2}{2g\left(h + k\sqrt{l^2-h^2}\right)},$$

$$s = \frac{1000\ \text{м}\cdot 400\ \text{м}^2/\text{сек}^2}{2\cdot 9{,}8\ \text{м/сек}^2\,(5 + 0{,}05\sqrt{10^6-25})\ \text{м}} \approx 370\ \text{м}.$$

57. Санки скользят с высоты 12 *м* по наклонной плоскости AB под углом 30° к горизонту. Пройдя 15 *м* по горизонтальной плоскости, санки поднимаются в гору по плоскости с углом наклона 15° к горизонту. Определить, на какой высоте остановятся санки, если известно, что коэффициент сопротивления на всем пути одинаков и равен 0,2 (см. рис. 37, б).

Дано:

$\alpha = 30°$;
$\beta = 15°$;
$s = 15$ *м*;
$k = 0{,}2$;
$H = 12$ *м*.

h — ?

Решение

Начальная и конечная скорость санок равна нулю. Следовательно, работа всех сил на пути AD равна нулю. На участке пути AB и CD на санки действует скатывающая сила и сила трения, а на участке BC — только сила трения. Таким образом,

$$(P\sin\alpha - kP\cos\alpha)\cdot AB - kPs - (P\sin\beta + kP\cos\beta)\cdot CD = 0,$$

где

$$AB = \frac{H}{\sin\alpha},\quad CD = \frac{h}{\sin\beta}.$$

Подставляя вместо AB и CD их значения и сокращая на P, получим

$$h = \frac{H(1 - k\operatorname{ctg}\alpha) - ks}{1 + k\operatorname{ctg}\beta},$$

$$h = \frac{12\ \text{м}\,(1 - 0{,}2\cdot 1{,}73) - 0{,}2\cdot 15\ \text{м}}{1 + 0{,}2\cdot 3{,}73} \approx 2{,}8\ \text{м}.$$

58. Какой максимальный подъем может преодолеть паровоз мощностью 500 *л. с.*, двигая состав со скоростью 7,2 *км/ч*, если коэффициент трения равен 0,002? Масса состава 1500 *т*.

Дано:

$N = 500$ *л. с.* $= 3{,}68\cdot 10^5$ *вт*;
$m = 1500$ *т* $= 1{,}5\cdot 10^6$ *кг*;
$v = 7{,}2$ *км/ч* $= 2$ *м/сек*;
$k = 0{,}002$.

α — ?

Решение

Сила тяги паровоза $F_{\text{тяги}}$ при равномерном движении должна уравновешивать скатывающую силу и силу трения, поэтому

$$F_{\text{тяги}} = P\sin\alpha + kP\cos\alpha = mg(\sin\alpha + k\cos\alpha);$$

$$N = \frac{A}{t} = F_{\text{тяги}}v.$$

Откуда

$$\sin\alpha + k\cos\alpha = \frac{N}{mgv}.$$

Для малых углов можно принять $\sin\alpha \approx \alpha$, $\cos\alpha \approx 1$.

Тогда

$$\alpha = \frac{N}{mgv} - k,$$

$$\alpha = \frac{3{,}68\cdot 10^5\ вт}{1{,}5\cdot 10^6\ кг\cdot 9{,}8\ м/сек^2\cdot 2\ м/сек} - 0{,}002 \approx 0{,}01\ рад.$$

59. В стену вбиты два гвоздя, один под другим на расстоянии h. К верхнему гвоздю подвешен математический маятник длиной $l = 2h$ (рис. 38). Маятник отклоняют до горизонтального положения и отпускают (начальная скорость равна 0). Достигнет ли маятник верхней точки?

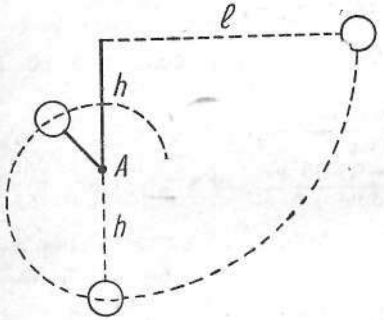


Рис. 38

Решение

Рассмотрим, какие условия должны быть для того, чтобы шарик достиг верхней точки, двигаясь по окружности радиусом h. При движении шарика по дуге радиусом h снизу вверх его линейная скорость уменьшается вследствие убывания кинетической энергии, при этом центростремительная сила тоже убывает. В верхней точке центростремительная сила должна быть не меньше веса шарика, иначе шарик не достигнет этой точки. Следовательно, это условие можно записать так:

$$F \geqslant P.$$

Пусть $F = P$; так как $F = \frac{mv^2}{h}$, а $P = mg$, то $\frac{mv^2}{h} = mg$, откуда $v = \sqrt{gh}$. Кинетическая энергия шарика в верхней точке будет $\frac{mv^2}{2}$ или $\frac{mgh}{2}$. Такую энергию шарик может иметь в верхней точке только в том случае, если его потенциальная энергия в начальный момент будет

$$mgl + \frac{mgh}{2} = 2\,mgh + \frac{mgh}{2} = \frac{5}{2}\ mgh,$$

что могло быть только в том случае, если бы он был поднят на высоту $\frac{5}{2}\ h$ или $l + \frac{h}{2}$.

Следовательно, шарик, имеющий в начальный момент потенциальную энергию, равную $mgl = 2\,mgh$, не поднимется на высоту $l = 2h$ и не попадет в верхнюю точку.

60. При ходьбе на лыжах на дистанцию в 20 *км* по горизонтальному пути происходят гармонические колебания центра тяжести спортсмена с вертикальной амплитудой 7,5 *см* и периодом 4 *сек*. Масса лыжника — 75 *кг*. Коэффициент трения лыж о снег равен 0,05. Работа, которую затрачивают мышцы лыжника, чтобы затормозить опускание центра тяжести, составляет 0,4 от работы, которая производится при подъеме центра тяжести на ту же высоту. Определить работу лыжника на марше, если всю дистанцию он прошел за 1 *ч* 30 *мин*, а также среднюю мощность лыжника.

Дано:

$m = 75\ кг;$
$s = 20\ км = 2\cdot 10^4\ м;$
$a = 7{,}5\ см = 0{,}075\ м;$
$k = 0{,}05;$
$T = 4\ сек;$
$t = 1{,}5\ ч = 5400\ сек.$

A — ? N — ?

Решение

На дистанции s произошло $\frac{t}{T}$ колебаний центра тяжести лыжника. При каждом колебании центр тяжести опускается и поднимается на высоту $h = 2a$, так как амплитуда колебаний равна a. Следовательно, работа, затрачиваемая лыжником на поднятие центра тяжести и на торможение его при опускании,

$$A_1 = mgh\,\frac{t}{T} + 0{,}4\ mgh\,\frac{t}{T} = 1{,}4\ mgh\,\frac{t}{T} = 2{,}8\ mga\,\frac{t}{T}.$$

Работа, затрачиваемая лыжником на преодоление силы трения,

$$A_2 = kmgs.$$

Таким образом,

$$A = A_1 + A_2 = mg\left(2{,}8a\,\frac{t}{T} + ks\right),$$

$$A = 75\ кг\cdot 9{,}8\ м/сек^2\left(2{,}8\cdot 0{,}075\ м\cdot\frac{5400}{4} + 0{,}05\cdot 2\cdot 10^4\ м\right) \approx$$
$$\approx 9{,}4\cdot 10^6\ дж = 9{,}4\ Мдж.$$

Средняя мощность равна

$$N = \frac{A}{t}, \quad N = \frac{9{,}4 \cdot 10^6\ дж}{5400\ сек} \approx 1{,}7 \cdot 10^3\ вт = 1{,}7\ квт.$$

61. Невесомый стержень, длина которого 1 *м*, может вращаться вокруг неподвижной точки *O* (рис. 39, *а*). На концах стержня, на расстояниях 0,4 и 0,6 *м* укреплены два груза соответственно с массами 6 *кг* и 3 *кг*. В начальный момент времени стержень расположен горизонтально. Затем конец стержня, на котором укреплен груз с массой 6 *кг*, начинает опускаться. Какую скорость будет иметь этот груз в самом низком положении?

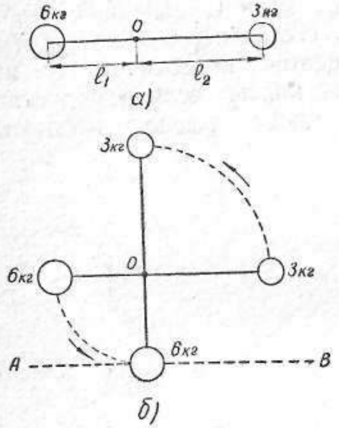


Рис. 39

Дано:

$m_1 = 6$ *кг*;
$m_2 = 3$ *кг*;
$l_1 = 0{,}4$ *м*;
$l_2 = 0{,}6$ *м*.

v_1 — ?

Решение

Потенциальную энергию условимся отсчитывать от уровня *AB* (рис. 39, *б*). Тогда закон сохранения энергии запишется так:

$$(m_1 + m_2)\, gl_1 = m_2 g\,(l_1 + l_2) + \frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2}.$$

Так как линейные скорости пропорциональны расстояниям до оси вращения, то

$$v_2 = \frac{l_2}{l_1}\, v_1.$$

Заменив в первом равенстве v_2 на v_1, получим

$$(m_1 + m_2)\, gl_1 = m_2 g\,(l_1 + l_2) + \frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 v_1^2\, l_2^2}{2\, l_1^2}.$$

Откуда

$$v_1 = \sqrt{\frac{2l_1^2\,[(m_1 + m_2)\, gl_1 - m_2 g\,(l_1 + l_2)]}{m_1 l_1^2 + m_2 l_2^2}}.$$

Подставив численные значения, найдем, что

$$v_1 \approx 0{,}96\ м/сек.$$

62. К концам нити, перекинутой через два блока, подвешены одинаковые грузы (рис. 40). Такой же груз подвешен к середине отрезка *AB* этой нити (точка *C*) и удерживается на таком уровне,

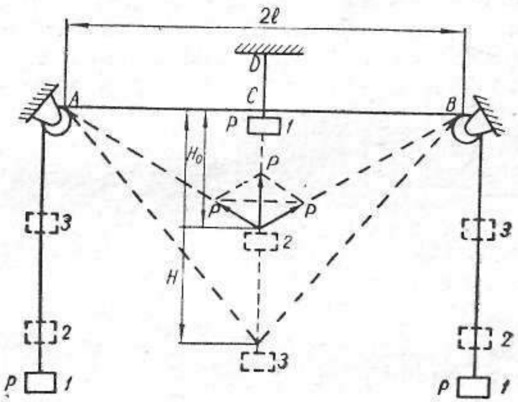


Рис. 40

что отрезок нити *AB* является прямолинейным. Расстояние между блоками 2*l*. На сколько опустится средний груз, если нить *DC* пережечь?

Решение

До пережигания нити система находится в состоянии *1*. После пережигания она, пройдя через состояние равновесия *2*, достигает состояния *3*. В состоянии равновесия

$$\frac{P}{2P} = \frac{H_0}{\sqrt{l^2 + H_0^2}}.$$

Очевидно, потенциальная энергия системы в состоянии *1* относительно состояния *2* равна

$$E_п = PH_0 - 2P\left(\sqrt{l^2 + H_0^2} - l\right).$$

Такой же потенциальной энергией относительно состояния *2* система обладает и в состоянии *3*:

$$E_п = 2P\left(\sqrt{l^2 + H^2} - \sqrt{l^2 + H_0^2}\right) - P\,(H - H_0).$$

Приравняв два последних выражения и учитывая первое соотношение, получим

$$H = \frac{3}{4} l.$$

63. Поезд массой 500 *т* шел равномерно по горизонтальному пути. От поезда оторвался задний вагон массой 20 *т*. Проехав после этого 200 *м*, машинист прекратил доступ пара в машину. На каком расстоянии друг от друга остановятся отделившийся вагон и остальной состав поезда? Предполагается, что машина все время работала одинаково и что сопротивление движению поезда и вагона пропорционально движущейся массе.

Дано:

$m = 500\ т = 5 \cdot 10^5\ кг;$
$m_1 = 20\ т = 2 \cdot 10^4\ кг;$
$s = 200\ м.$

s_x — ?

Решение

Пусть $s = 200\ м$, s_1 — путь, пройденный оторвавшимся вагоном до остановки, s_2 — путь, пройденный остальным составом поезда после прекращения доступа пара в машину до остановки, s_x — расстояние между остановившимся вагоном и поездом:

$$s_x = s + s_2 - s_1.$$

Если после отрыва заднего вагона прекратится доступ пара в машину, поезд и оторвавшийся вагон будут двигаться одинаково и пройдут путь, определяемый из формулы

$$\frac{mv^2}{2} = km_1gs_1$$

или

$$\frac{(m - m_1)v^2}{2} = k(m - m_1)gs_1.$$

При равномерном движении поезда сила тяги паровоза уравновешивается силой сопротивления всего состава: $F_{тяги} = kmg$. Когда задний вагон оторвался, то сила сопротивления уменьшилась, а сила тяги по условию задачи не изменилась.

На поезд стала действовать сила F, ускоряющая его движение, равная

$$F = kmg - k(m - m_1)g = km_1g.$$

Поезд после отрыва вагона стал двигаться под действием этой силы ускоренно и его кинетическая энергия на пути s возросла на величину $\Delta E_к$. Изменение кинетической энергии можно определить по работе силы F на пути s:

$$\Delta E_к = km_1gs.$$

Когда машинист прекратил доступ пара в машину, поезд уже обладал кинетической энергией

$$E_к = \frac{(m - m_1)v^2}{2} + \Delta E_к = \frac{(m - m_1)v^2}{2} + km_1gs.$$

Подставив в последнее выражение вместо $\frac{(m - m_1)v^2}{2}$ его значение $k(m - m_1)gs_1$, получим

$$E_к = k(m - m_1)gs_1 + km_1gs.$$

Кинетическая энергия $E_к$ поезда была израсходована на работу по преодолению сопротивления на пути s_2:

$$k(m - m_1)gs_2 = k(m - m_1)gs_1 + km_1gs.$$

Отсюда

$$s_2 - s_1 = \frac{m_1 s}{m - m_1}.$$

Подставив в выражение $s_x = s + s_2 - s_1$ вместо $s_2 - s_1$ его значение, получим

$$s_x = \frac{ms}{m - m_1},$$

$$s_x = \frac{5 \cdot 10^5\ кг \cdot 200\ м}{5 \cdot 10^5\ кг - 2 \cdot 10^4\ кг} \approx 210\ м.$$

64. Физкультурник разбегается в течение времени t и прыгает в длину. Определить максимальную дальность прыжка, если коэффициент трения k, а максимальная высота прыжка h.

Решение

Горизонтальную составляющую скорости в момент начала прыжка v_1 можно найти из второго закона Ньютона:

$$mv_1 - mv_0 = kmgt_1 + kQt_2,$$

где t_1 — время разбега; t_2 — время толчка; m — масса физкультурника; Q — сила нормального давления при толчке; начальная скорость v_0 равна нулю.

Так как $t = t_1 + t_2$, а $(Q - mg)t_2 = mv_{верт}$, то

$$mv_1 = k(mgt + mv_{верт}),$$

откуда

$$v_1 = k(gt + v_{\text{верт}}) = k(gt + \sqrt{2gh}).$$

Зная горизонтальную составляющую скорости, можно определить и дальность прыжка:

$$s = 2k\sqrt{\frac{2h}{g}}(gt + \sqrt{2gh}).$$

65. С какой скоростью растет толщина покрытия стенки золотом при распылении, если атомы золота летят, обладая энергией 10^{-10} *эрг*, и производят давление на стенку, равное 1 *дин/см²*? Плотность золота 19 300 *кг/м³*.

Дано:

$E_к = 10^{-10}$ *эрг* $= 10^{-17}$ *дж*;
$p = 1$ *дин/см²* $= 0{,}1$ *н/м²*;
$\rho = 19\,300$ *кг/м³*.

$\frac{l}{t}$ — ?

Решение

Пусть l — толщина слоя, тогда скорость покрытия выразится как $\frac{l}{t}$; примем эту величину за искомую. При этом через m будем обозначать массу одной молекулы золота, через M — массу всех молекул.

Известно, что произведение массы на скорость есть количество движения, а произведение силы на время — импульс силы. Тогда

$$Mv = Ft.$$

Масса отложившегося вещества равна

$$M = lS\rho,$$

где l — толщина слоя; S — поверхность стенки; ρ — плотность золота.

Давление, производимое атомами золота, равно частному:

$$p = \frac{F}{S}.$$

Подставив вместо F его значение, получим

$$p = \frac{l}{t}\rho v,$$

где v — скорость атомов золота, которую находим из формулы

$$E_к = \frac{mv^2}{2}.$$

Откуда

$$v = \sqrt{\frac{2E_к}{m}}.$$

Определим массу атома золота. Атомный вес золота равен $A = 197$, и по закону Авогадро в каждом килограмм-моле находится $N = 6{,}025 \cdot 10^{26}$ атомов.

Следовательно, масса одного атома

$$m = \frac{A}{N}.$$

Итак,

$$v = \sqrt{\frac{2E_к N}{A}}.$$

Подставив в формулу

$$p = \frac{l}{t}\rho v$$

вместо v его значение, получим скорость напыления

$$\frac{l}{t} = \frac{p}{\rho}\sqrt{\frac{A}{2E_к N}},$$

$$\frac{l}{t} = \frac{0{,}1}{19\,300}\sqrt{\frac{197}{2 \cdot 10^{-17} \cdot 6{,}025 \cdot 10^{26}}} = 6{,}625 \cdot 10^{-10}\ м/сек.$$

66. Два абсолютно упругих тела массами m и M подвешены на длинных нерастяжимых нитях. Тело массой m отклонили на угол α и отпустили. Проанализировать, как будут изменяться в зависимости от отношения масс $k = \frac{M}{m}$ максимальные углы отклонения тел после удара.

Решение

Обозначим длину нити через l. При отклонении на угол α (рис. 41, a) тело m будет находиться на высоте

$$h = OC - OB = l - l\cos\alpha = l(1 - \cos\alpha).$$

Потенциальная энергия данного тела в положении A

$$E_п = mgl(1 - \cos\alpha).$$

При своем движении в точке C тело имеет определенную скорость, которую легко подсчитать по закону сохранения энергии

$$\frac{mv^2}{2} = mgl(1 - \cos\alpha)$$

или

$$v = \sqrt{2gl(1-\cos\alpha)}.$$

После удара о тело M первое тело отскочит и поднимется на высоту h_1, второе — на высоту h_2 (рис. 41, *б*). Пусть углы отклонения будут соответственно β и γ. До удара количество движения первого тела равнялось mv, второго — нулю. Пусть u_1 и u_2 — скорости движения тел после удара, тогда по закону сохранения количества движения получим

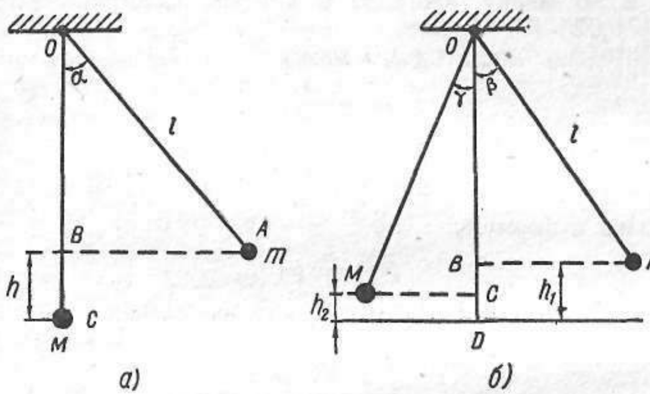


Рис. 41

$$mu_1 + Mu_2 = mv,$$

а по закону сохранения энергии

$$\frac{mu_1^2}{2} + \frac{Mu_2^2}{2} = \frac{mv^2}{2}.$$

Составим систему уравнений

$$mv = mu_1 + Mu_2;$$
$$mv^2 = mu_1^2 + Mu_2^2$$

и найдем значения u_1 и u_2:

$$\begin{cases} m(v-u_1) = Mu_2; \\ m(v^2-u_1^2) = Mu_2^2, \end{cases} \quad \begin{cases} m(v-u_1) = Mu_2; \\ m(v-u_1)(v+u_1) = Mu_2^2. \end{cases}$$

Разделив второе уравнение на первое, получим

$$u_2 = u_1 + v.$$

Подставляя данное значение в уравнение $mu_1 + Mu_2 = mv$, получим

$$mv = mu_1 + Mv + Mu_1,$$
$$mv - Mv = mu_1 + Mu_1,$$

откуда

$$u_1 = \left(\frac{m-M}{m+M}\right)v = \frac{1-k}{1+k}v,$$

где

$$k = \frac{M}{m}.$$

Аналогичным образом найдем u_2:

$$u_2 = \frac{2v}{1+k}.$$

Таким образом, тело m поднимется на высоту h_1:

$$h_1 = \frac{u_1^2}{2g} = \left(\frac{1-k}{1+k}v\right)^2 \Big/ 2g = \left(\frac{1-k}{1+k}\right)^2 l(1-\cos\alpha).$$

Точно так же

$$h_2 = \frac{u_2^2}{2g} = \frac{4v^2}{(1+k)^2\, 2g} = \frac{4l(1-\cos\alpha)}{(1+k)^2}.$$

Из треугольника BOm

$$\cos\beta = \frac{l-h_1}{l} = \frac{l - \left(\frac{1-k}{1+k}\right)^2 l(1-\cos\alpha)}{l} =$$
$$= 1 - \left(\frac{1-k}{1+k}\right)^2 (1-\cos\alpha).$$

Аналогично

$$\cos\gamma = 1 - \frac{4(1-\cos\alpha)}{(1+k)^2}.$$

Рассмотрим несколько случаев.

1. Пусть $k \to \infty$. Это возможно, когда $m \to 0$ или $M \to \infty$. Тогда

$$\cos\beta = \cos\alpha, \ \cos\gamma = 1$$

или

$$\beta = \alpha, \ \gamma = 0,$$

т. е. второе тело остается неподвижным, а первое отскакивает от него на первоначальный угол.

2. $k = 1$ или $M = m$. В этом случае

$$\cos\beta = 1; \qquad \beta = 0;$$
$$\cos\gamma = \cos\alpha; \quad \gamma = \alpha,$$

т. е. после удара первое тело полностью останавливается, а второе приходит в движение. Тела обмениваются движениями.

3. $k \to 0$. Тогда

$$\cos\beta = 1 - (1 - \cos\alpha) = \cos\alpha; \quad \beta = \alpha;$$
$$\cos\gamma = 1 - 4(1 - \cos\alpha) = 4\cos\alpha - 3.$$

67. Подвешенный на нити шарик массой 0,1 *кг*, отклоняясь на угол 45°, колеблется в вертикальной плоскости. Определить натяжение нити в тот момент, когда она отклонена от вертикали на угол 30°.

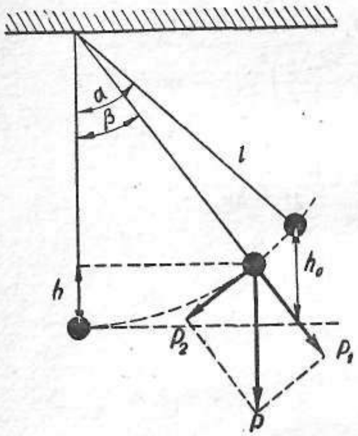


Рис. 42

Дано:

$\alpha = 45°$;
$\beta = 30°$;
$m = 0{,}1$ *кг*;
$g = 9{,}8$ *м/сек*^{2}.

F — ?

Решение

Пусть нить составляет с вертикалью угол β. Разложим действующую на шарик силу тяжести по двум направлениям: радиусу окружности и касательной к ней (рис. 42). Тогда натяжение нити равно сумме двух сил: центробежной силы и нормальной составляющей веса шарика:

$$F = P_1 + \frac{mv^2}{l},$$

где F — сила натяжения нити; l — длина ее; v — линейная скорость.

По закону сохранения энергии

$$\frac{mv^2}{2} = mg(h_0 - h).$$

Из рисунка видно, что

$$h_0 - h = l(\cos\beta - \cos\alpha).$$

Поэтому

$$\frac{mv^2}{l} = 2mg(\cos\beta - \cos\alpha).$$

Подставляя это значение в выражение для натяжения нити и учитывая, что $P_1 = P\cos\beta$, получим

$$F = mg(3\cos\beta - 2\cos\alpha),$$
$$F = 0{,}1\ кг \cdot 9{,}8\ м/сек^2 (3 \cdot 0{,}866 - 2 \cdot 0{,}707) \approx 1{,}16\ н.$$

ЗАКОН ВСЕМИРНОГО ТЯГОТЕНИЯ

68. Какую необходимо сообщить телу минимальную скорость в горизонтальном направлении к поверхности Земли, чтобы оно стало искусственным спутником Земли? Определить период обращения спутника Земли на высоте 1000 *км*.

Дано:

$h = 1000$ *км* $= 10^6$ *м*;
$M = 5{,}96 \cdot 10^{24}$ *кг*;
$R = 6{,}4 \cdot 10^6$ *м*;
$\gamma = 6{,}67 \cdot 10^{-11}$ *м*^{3}/*кг*·*сек*^{2}.

v — ? T — ?

Решение

Пусть тело находится на некоторой очень малой высоте над поверхностью Земли. При сообщении телу некоторой определенной скорости в горизонтальном направлении оно будет двигаться вокруг Земли по круговой орбите, превратившись в искусственный спутник Земли (это утверждение справедливо, если пренебречь сопротивлением воздуха). Соответствующее значение скорости этого тела носит название первой космической скорости.

На тело, двигающееся по круговой орбите, действует центростремительная сила, величина которой выражается формулой

$$F_{цст} = \frac{mv^2}{R},$$

где m — масса тела; v — скорость движения; R — радиус кривизны траектории.

В рассмотренном случае центростремительной силой является сила притяжения тела Землей. Эта сила притяжения выражается формулой

$$F_{пр} = \gamma \frac{mM}{R^2},$$

где M — масса Земли; γ — гравитационная постоянная; R — расстояние тела от центра Земли (равное радиусу кривизны траектории).

Приравнивая выражения для центростремительной силы $F_{цст}$ и силы притяжения $F_{пр}$, получаем

$$\frac{mv^2}{R} = \gamma \frac{mM}{R^2}.$$

Отсюда можно найти следующее выражение для скорости v:

$$v = \sqrt{\frac{\gamma M}{R}}.$$

Подставляем в это выражение численные значения входящих в него величин:

$$v = \sqrt{\frac{6{,}67 \cdot 10^{-11}\ м^3/кг \cdot сек^2 \cdot 5{,}96 \cdot 10^{24}\ кг}{6{,}4 \cdot 10^6\ м}} \approx$$

$$\approx 7{,}9 \cdot 10^3\ м/сек = 7{,}9\ км/сек.$$

Значение скорости v можно найти, если даже значение массы Земли M является неизвестным. Для этого надо разделить обе части равенства $F_{пр} = \gamma \frac{mM}{R^2}$ на m:

$$\frac{F_{пр}}{m} = \frac{\gamma M}{R^2}.$$

Согласно второму закону Ньютона, отношение $\frac{F_{пр}}{m}$ равно ускорению g свободно падающего тела у поверхности Земли:

$$g = \frac{\gamma M}{R^2}.$$

Следовательно,

$$\frac{\gamma M}{R} = gR$$

и

$$v = \sqrt{gR}.$$

Подставим в последнее уравнение значения g и R, выраженные в единицах системы СИ: $g = 9{,}8\ м/сек^2$, $R = 6{,}4 \cdot 10^6\ м$.

Выполнив арифметические действия, получим

$$v = \sqrt{9{,}8\ м/сек^2 \cdot 6{,}4 \cdot 10^6\ м} = 7{,}9 \cdot 10^3\ м/сек.$$

Период обращения спутника вокруг Земли

$$T = \frac{2\pi}{\omega},$$

где ω — угловая скорость обращения спутника вокруг Земли. Она равна

$$\omega = \frac{v}{R+h},$$

где $v = \sqrt{\frac{\gamma M}{R+h}}$ — скорость спутника; h — высота нахождения спутника над поверхностью Земли. Таким образом,

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{(R+h)^3}{\gamma M}},$$

$$T = 2 \cdot 3{,}14 \sqrt{\frac{7{,}4^3 \cdot 10^{18}\ м^3}{6{,}67 \cdot 10^{-11}\ м^3/кг \cdot сек^2 \cdot 5{,}96 \cdot 10^{24}\ кг}} =$$

$$= 6330\ сек \approx 1\ ч\ 45\ мин.$$

69. На какую высоту должен быть запущен искусственный спутник Земли, чтобы его период обращения был равен периоду вращения Земли вокруг своей оси? Масса Земли $5{,}96 \cdot 10^{24}$ *кг*.

Дано:

$T = 24\ ч = 86400\ сек;$
$M = 5{,}96 \cdot 10^{24}\ кг;$
$\gamma = 6{,}67 \cdot 10^{-11}\ м^3/кг \cdot сек^2.$

h — ?

Решение

Центростремительное ускорение может быть определено из формулы кинематики

$$a = \frac{v^2}{R+h}$$

и по закону всемирного тяготения

$$a = \frac{\gamma M}{(R+h)^2},$$

где R — радиус Земли; v — линейная скорость обращения спутника вокруг Земли; γ — гравитационная постоянная; h — высота, на которой находится спутник.

Очевидно, что

$$\frac{v^2}{R+h} = \frac{\gamma M}{(R+h)^2},$$

откуда

$$v^2 = \frac{\gamma M}{R+h}.$$

Так как скорость

$$v = \frac{2\pi(R+h)}{T},$$

то

$$\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 (R+h)^2 = \frac{\gamma M}{R+h}.$$

Следовательно,

$$R+h = \sqrt[3]{\gamma M\left(\frac{T}{2\pi}\right)^2},$$

$$R+h = \sqrt[3]{6{,}67\cdot10^{-11}\ м^3/кг\cdot сек^2\cdot 5{,}96\cdot10^{24}\ кг\left(\frac{86400}{2\cdot3{,}14}\right)^2 сек^2} =$$

$$= 9{,}1\cdot10^7\ м = 91\,000\ км.$$

Расстояние от центра Земли до спутника равно $R+h$. Высота $h = 91\,000\ км - 6400\ км = 84\,600\ км$.

Таким образом, спутник, пролетающий на высоте примерно 84 600 *км*, будет парить над одной и той же точкой земной поверхности (если, конечно, он вращается в ту же сторону, что и Земля). При этом спутник должен также находиться над одним из пунктов земного экватора.

70. На экваторе некоторой планеты тела весят вдвое меньше, чем на полюсе. Плотность вещества планеты 3000 $кг/м^3$. Определить период обращения планеты около собственной оси.

Дано:

$\rho = 3000\ кг/м^3$;
$\gamma = 6{,}67\cdot10^{-11}\ м^3/кг\cdot сек^2$.

T — ?

Решение

По условию задачи вес тела на экваторе планеты вдвое меньше, чем на полюсе. Это означает, что центростремительная сила, необходимая для удержания тела на экваторе, при вращении планеты

вокруг своей оси составляет половину силы тяготения. Рассмотрим это подробнее.

По третьему закону Ньютона со стороны опоры на тело действует сила P', равная и противоположная весу тела P.

Таким образом, к покоящимся на планете телам приложены две силы: сила тяготения $F_{тяг}$ и реакция опоры P', численно равная P. Эти силы сообщают телу необходимое центростремительное ускорение при вращении планеты вокруг своей оси. На полюсе и на экваторе они направлены по одной линии (по вертикали).

По второму закону Ньютона

$$\frac{mv^2}{R} = F_{тяг} - P',$$

где v — скорость движения тела вокруг оси.

На полюсе $v = 0$ и $P'_0 = F_{тяг}$.

Реакция опоры и, следовательно, вес тела на полюсе равен силе тяготения.

На экваторе

$$v = \frac{2\pi R}{T},$$

где T — период обращения,

$$P'_э = F_{тяг} - \frac{m4\pi^2R}{T^2}.$$

По условию

$$P_э = 0{,}5P'_0 = 0{,}5F_{тяг},$$

откуда

$$\frac{4\pi^2mR}{T^2} = 0{,}5F_{тяг}.$$

По закону всемирного тяготения

$$F_{тяг} = \gamma\frac{mM}{R^2},$$

где m — масса тела; M — масса планеты; R — радиус планеты, но $M = \frac{4}{3}\pi R^3\rho$, где ρ — плотность планеты.

Подставляя в формулу $\frac{4\pi^2mR}{T^2} = 0{,}5F_{тяг}$ выражения для $F_{тяг}$ и M, получаем

$$\frac{4\pi^2mR}{T^2} = 0{,}5\gamma\frac{m\frac{4}{3}\pi R^3\rho}{R^2}.$$

После сокращения получим

$$T=\sqrt{\frac{6\pi}{\gamma\rho}}.$$

Подставив численные значения, найдем

$$T=\sqrt{\frac{6\cdot 3{,}14\cdot 10^{11}}{3000\ кг/м^3\cdot 6{,}67\ м^3/кг\cdot сек^2}}=9703\ сек\ (2\ ч\ 41{,}7\ мин).$$

71. Какую скорость приобретает метеорит, падая с высоты 800 *км* до ощутимо плотных слоев атмосферы, расположенных на высоте 100 *км*, если допустить, что сопротивление движению до этой высоты так мало, что им можно пренебречь? Какое количество теплоты при этом выделится, если заметное торможение метеорита началось на высоте 100 *км*. Считать, что вся кинетическая энергия метеорита превратилась в тепло.

Дано:

$h_2=800\ км=8\cdot 10^5\ м;$
$h_1=100\ км=10^5\ м;$
$M=5{,}96\cdot 10^{24}\ кг;$
$R=6400\ км=6{,}4\cdot 10^6\ м;$
$\gamma=6{,}67\cdot 10^{-11}\ м^3/кг\cdot сек^2.$

v — ? Q — ?

Решение

При отсутствии потерь кинетическая энергия метеорита возрастает настолько, насколько уменьшится его потенциальная энергия:

$$E_{п_0}-E_п=\frac{mv^2}{2}-\frac{mv_0^2}{2},$$

где m — масса метеорита; v_0 и v — вертикальные составляющие скорости метеорита.

Предположим, что начальная скорость метеорита $v_0=0$. В первом приближении можно воспользоваться формулой потенциальной энергии

$$E_п=mg(h_2-h_1),$$

где g — ускорение для какой-то средней высоты $h=\frac{h_1+h_2}{2}$ над Землей между начальной и конечной точками падения. Для определения g для высоты h воспользуемся законом всемирного тяготения:

$$F=\gamma\frac{mM}{(R+h)^2},$$

где M — масса Земли; R — радиус Земли.

С другой стороны,

$$F=mg.$$

Из двух последних равенств находим, что

$$g=\gamma\frac{M}{(R+h)^2}.$$

Так как

$$mg(h_2-h_1)=\frac{mv^2}{2},$$

то

$$v=\sqrt{2g(h_2-h_1)}=\sqrt{\frac{2\gamma M(h_2-h_1)}{\left(R+\frac{h_1+h_2}{2}\right)^2}},$$

$$v=\sqrt{\frac{2\cdot 6{,}67\cdot 10^{-11}\ м^3/кг\cdot сек^2\cdot 5{,}96\cdot 10^{24}\ кг\cdot 7\cdot 10^5\ м}{(6{,}4\cdot 10^6\ м+4{,}5\cdot 10^5\ м)^2}}\approx 3450\ м/сек.$$

При такой скорости в процессе торможения должно выделиться огромное количество тепла.

При полной остановке метеорита вся его кинетическая энергия $E_к=\frac{mv^2}{2}$ обратится в теплоту Q, т. е.

$$Q=\frac{v^2}{2}m,\quad Q\approx 6m\ Мдж,$$

т. е. на каждый килограмм приходится 6 *Мдж* теплоты.

72. Считая, что орбита первого советского искусственного спутника Земли имела окружность радиусом 7340 *км*, определить число оборотов спутника за сутки.

Дано:

$r=7340\ км=7{,}34\cdot 10^6\ м;$
$R=6{,}4\cdot 10^6\ м.$

n — ?

Решение

Число оборотов определим по формуле

$$n = \frac{\omega}{2\pi},$$

где ω — угловая скорость спутника. В каждый момент времени ее можно рассчитать по формуле

$$\omega = \frac{v}{r},$$

где v — линейная скорость; r — радиус обращения.

Определим скорость v.

Если тело обращается по окружности под действием силы тяготения, то последняя играет роль центростремительной силы. Она должна быть равна произведению массы спутника m на ускорение a. Поэтому

$$\gamma \frac{mM}{r^2} = \frac{mv^2}{r},$$

где M — масса Земли. Откуда

$$v = \sqrt{\frac{\gamma M}{r}}.$$

Число оборотов

$$n = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{v}{2\pi r} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{\gamma M}{r^3}}.$$

Из выражения $g_0 = \frac{\gamma M}{R^2}$ найдем значение $\gamma M = g_0 R^2$ и подставим в предыдущее уравнение

$$n = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{g_0 R^2}{r^3}}.$$

После подстановки данных получим $n = 15$ оборотов.

73. Подсчитать ускорение свободно падающих тел на поверхности Солнца, если известны радиус земной орбиты ($149{,}5 \cdot 10^9$ *м*), радиус Солнца ($695{,}5 \cdot 10^6$ *м*) и время обращения Земли вокруг Солнца (один год).

Дано:

$R = 149{,}5 \cdot 10^9$ *м*;
$r = 695{,}5 \cdot 10^6$ *м*;
$T = 1$ год $= 365{,}255 \cdot 24 \cdot 3600$ *сек* $=$
$= 3154 \cdot 10^4$ *сек*.

g_C — ?

Решение

При движении Земли по своей орбите вокруг Солнца возникает центростремительная сила $F_{цст}$, которая удерживает Землю на ее круговой орбите:

$$F_{цст} = \frac{mv^2}{R}.$$

Так как

$$v = \frac{2\pi R}{T},$$

то

$$F_{цст} = \frac{4\pi^2 mR}{T^2}.$$

По третьему закону Ньютона одновременно с центростремительной возникает центробежная сила, которая уравновешивается силой всемирного тяготения

$$F = \gamma \frac{mM}{R^2}.$$

Приравняв правые части, получим

$$\frac{4\pi^2 R}{T^2} = \gamma \frac{M}{R^2}.$$

В этом уравнении неизвестно M. Сила тяжести любого тела $P = mg_C$ уравновешивается силой всемирного тяготения $F = \gamma \frac{mM}{r^2}$. Приравняв правые части, получим

$$M = \frac{r^2 g_C}{\gamma}.$$

Подставив это выражение в предыдущее уравнение, получим

$$\frac{4\pi^2 R}{T^2} = \frac{r^2 g_C}{R^2},$$

откуда

$$g_C = \frac{4\pi^2 R^3}{T^2 r^2},$$

$$g_C = \frac{4 \cdot 3{,}14^2 \cdot 149{,}5^3 \cdot 10^{27}\ м^3}{3154^2 \cdot 10^8\ сек^2 \cdot 695{,}5^2 \cdot 10^{12}\ м^2} = 273\ м/сек^2.$$

74. В однородном шаре радиусом r и массой M имеется сферическая полость радиусом $\frac{r}{2}$, поверхность которой касается шара и проходит через его центр (рис. 43). На расстоянии l от центра шара находится точечное тело, масса которого m. С какой силой шар с полостью будет притягивать тело A?

Решение

Рассмотрим случай, когда точечное тело A находится со стороны вырезанной полости. Сила взаимодействия между сплошным шаром и телом A определяется по формуле

$$F_1 = \gamma \frac{mM}{l^2}.$$

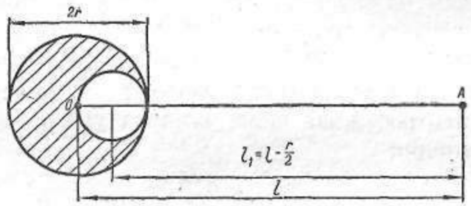


Рис. 43

Так как шар полый, то его масса уменьшится на

$$M_1 = \frac{4}{3}\pi\left(\frac{r}{2}\right)^3 \rho = \frac{1}{8}\cdot\frac{4}{3}\pi r^3 \rho = \frac{M}{8}.$$

Расстояние центра массы M_1 от тела A

$$l_1 = l - \frac{r}{2}.$$

Вследствие того, что шар полый, сила взаимодействия между двумя телами F_1 уменьшится на

$$F_2 = \gamma \frac{mM_1}{l_1^2} = \gamma \frac{mM}{8\left(l - \frac{r}{2}\right)^2}.$$

Тогда искомая сила $F = F_1 - F_2$ или

$$F = \gamma \frac{mM}{l^2} - \gamma \frac{mM}{8\left(l - \frac{r}{2}\right)^2} = \gamma mM \left[\frac{7l^2 - 8lr + 2r^2}{8l^2\left(l - \frac{r}{2}\right)^2}\right].$$

Предлагаем читателям рассмотреть самостоятельно случай, когда тело A расположено по другую сторону шара.

КОЛЕБАТЕЛЬНЫЕ ДВИЖЕНИЯ

75. Радиус $OB = r$ равномерно вращается против часовой стрелки с угловой скоростью ω (рис. 44, *а*). Точка A — проекция точки B на ось x. За начало отсчета времени приняли тот момент, когда угол $\varphi_0 = \frac{\pi}{6}$. Напишите формулу, по которой можно найти скорость точки A для любого момента времени t.

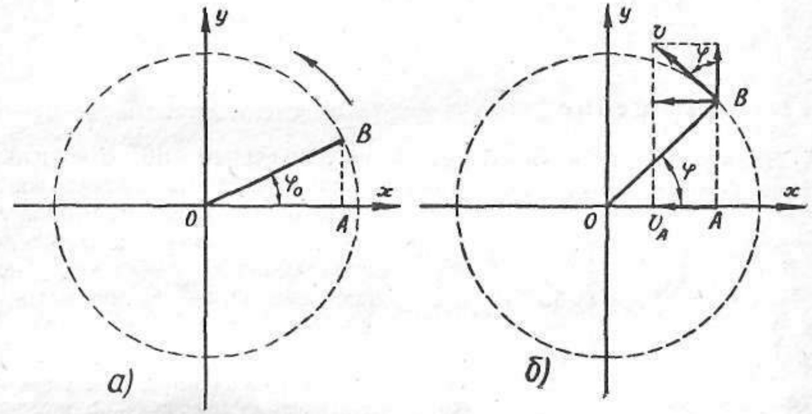


Рис. 44

Решение

Угол поворота при равномерном вращении

$$\varphi = \omega t.$$

Угол между подвижным радиусом OB и осью x (рис. 44, *б*)

$$\varphi = \omega t + \frac{\pi}{6}.$$

Скорость точки A равна горизонтальной составляющей скорости точки B, поэтому

$$v_A = -v \sin \varphi = -\omega r \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{6}\right).$$

Знак минус стоит потому, что скорость направлена в сторону убывания координаты x.

76. Тележка, на которой укреплен маятник с периодом колебаний 0,5 *сек*, находится на наклонной плоскости, расположенной под углом 45° к плоскости горизонта. Чему будет равен период колебания T_1 маятника, когда тележка начнет скатываться по наклонной плоскости?

Дано:

$T = 0{,}5$ *сек*;
$\alpha = 45°$;
$g = 9{,}8$ *м/сек²*.
T_1 — ?

Решение

Движение маятника будет равноускоренным по отношению к поверхности Земли и колебательным по отношению к поверхности тележки. Скатывающая сила F_1 сообщит маятнику ускорение поступательного движения, под действием силы F_2 происходят колебания (рис. 45). Сила F_2 является нормальной составляющей веса маятника P, а сила F_1 направлена параллельно наклонной плоскости вниз. Из рисунка видно, что

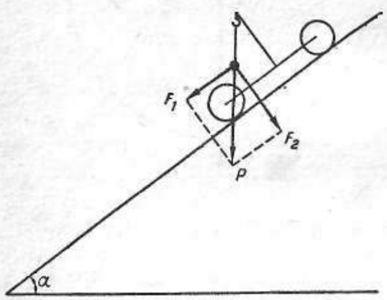


Рис. 45

$$F_2 = P\cos\alpha = mg\cos\alpha,$$

где m — масса маятника; g — ускорение силы тяжести.

Зная F_2, можно легко определить период колебания маятника

$$T_1 = 2\pi\sqrt{\frac{l}{a}} = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g\cos\alpha}} = T\frac{1}{\sqrt{\cos\alpha}},$$

$$T_1 = 0{,}5\ сек\ \sqrt{2} = 0{,}6\ сек.$$

77. На пружине подвешен грузик массой m. Период колебаний системы составляет 0,5 *сек*. Затем подвешивают еще один грузик, в результате чего период колебаний пружины возрастает до 0,6 *сек*. Определить, на сколько удлинилась пружина под действием перегрузки.

Дано:

$T_1 = 0{,}5$ *сек*;
$T_2 = 0{,}6$ *сек*.
Δl — ?

Решение

Период колебаний пружины под действием грузика массой m определяется формулой

$$T_1 = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}.$$

Если к пружине подвесить еще один грузик Δm, то период колебаний станет равен

$$T_2 = 2\pi\sqrt{\frac{m+\Delta m}{k}},$$

откуда

$$T_2^2 - T_1^2 = 4\pi^2\frac{m+\Delta m}{k} - 4\pi^2\frac{m}{k} = 4\pi^2\frac{\Delta m}{k}.$$

При небольших растяжениях пружины

$$k = \frac{F}{\Delta l},$$

где F — действующая сила; Δl — удлинение под действием этой силы.

В нашем случае $F = \Delta m\cdot g$.

Тогда

$$k = \frac{\Delta m\cdot g}{\Delta l}.$$

Подставляя значение k в уравнение $T_2^2 - T_1^2 = 4\pi^2\frac{\Delta m}{k}$, найдем

$$\Delta l = \frac{g(T_2^2 - T_1^2)}{4\pi^2},\quad \Delta l = 2{,}73\ см.$$

78. За счет отклонения из положения равновесия ареометр в сосуде с водой совершает гармонические колебания с периодом 1 *сек*. Каков будет период колебаний ареометра в керосине?

Дано:

$T_1 = 1$ *сек*;
$\rho_1 = 1000$ *кг/м³*;
$\rho_2 = 800$ *кг/м³*.
T_2 — ?

Решение

Пусть отклонение ареометра из положения равновесия в воде h (рис. 46). Тогда сила, стремящаяся вернуть его в положение равновесия, равна

$$F = \rho_1 ghS,$$

где ρ_1 — плотность воды; S — площадь поперечного сечения трубки ареометра.

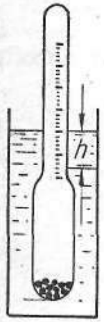


Рис. 46

С другой стороны,

$$F = \frac{4\pi^2 m}{T_1^2} h,$$

где m — масса ареометра.
Тогда

$$\rho_1 ghS = \frac{4\pi^2 m}{T_1^2} h,$$

откуда

$$T_1 = 2\pi \sqrt{\frac{m}{\rho_1 gS}}.$$

Аналогичным образом можем написать формулу для периода колебания ареометра в керосине

$$T_2 = 2\pi \sqrt{\frac{m}{\rho_2 gS}},$$

где ρ_2 — плотность керосина.
Отношение периодов колебаний

$$\frac{T_1}{T_2} = \sqrt{\frac{\rho_2}{\rho_1}},$$

откуда

$$T_2 = T_1 \sqrt{\frac{\rho_1}{\rho_2}}.$$

Подставляя численные значения, получим

$$T_2 = 1 \text{ сек} \cdot \sqrt{\frac{10}{8}} \approx 1{,}12 \text{ сек}.$$

МЕХАНИКА ЖИДКОСТЕЙ И ГАЗОВ

79. Деревянный цилиндр плавает на поверхности воды так, что он погружен в воду на 90%. Какая часть цилиндра будет погружена в воду, если поверх воды налить слой масла, полностью закрывающий цилиндр? Плотность масла 800 *кг/м³*.

Дано:

$\rho_1 = 1000$ *кг/м³*;
$\rho_2 = 800$ *кг/м³*;
$H = 0{,}9h$.

h_1 — ?

Решение

Когда цилиндр погружается и в воду, и в масло, то на него будет действовать выталкивающая сила и со стороны воды, и со стороны масла. Поэтому выталкивающая сила (общая) должна уменьшиться на величину силы ($F_1 = \rho_2 gV_1$), с которой вода выталкивает масло, против первоначальной ($F = 0{,}9\rho_1 gV$), т. е. выталкивающая сила

$$F = 0{,}9\rho_1 gV - \rho_2 gV_1.$$

Так как какая-то часть цилиндра погружена в воду, то вода также стремится вытолкнуть цилиндр с силой, равной произведению погруженного в нее объема на удельный вес воды, т. е. $F_2 = \rho_1 gV_2$. Так как цилиндр находится внутри жидкости, то очевидно, что общая выталкивающая сила F не превышает выталкивающей силы воды, т. е.

$$F = F_2$$

или

$$0{,}9\rho_1 gV - \rho_2 gV_1 = \rho_1 gV_2.$$

Заменив V_1 на $V - V_2$ и решив уравнение относительно V_2 (объема той части цилиндра, которая погружена в воду), получим

$$V_2 = \frac{0{,}9\rho_1 - \rho_2}{\rho_1 - \rho_2} V.$$

Теперь, заменив V_2 на Sh_1 и V на Sh, будем иметь

$$h_1 = \frac{0{,}9\rho_1 - \rho_2}{\rho_1 - \rho_2} h.$$

После подстановки численных значений получим

$$h_1 = \frac{0{,}9 \cdot 1000\ кг/м^3 - 800\ кг/м^3}{200\ кг/м^3}\, h = \frac{1}{2}\, h.$$

Итак, цилиндр погружен в воду на 50%.

80. Кусок пробки весит в воздухе 15 $Г$, кусок свинца — 113 $Г$. Если эти куски связать, подвесить к чашке весов и опустить в керосин, то показание весов будет 60 $Г$. Определить удельный вес пробки, учитывая, что удельный вес керосина равен 0,8 $Г/см^3$, а свинца — 11,3 $Г/см^3$.

Дано:

$P_1 = 15\ Г = 14{,}7 \cdot 10^{-2}\ н$;
$P_2 = 113\ Г = 1{,}1\ н$;
$P_3 = 60\ Г = 58{,}9 \cdot 10^{-2}\ н$;
$d_2 = 11{,}3\ Г/см^3 = 11{,}3 \cdot 9{,}8 \cdot 10^3\ н/м^3$;
$d_3 = 0{,}8\ Г/см^3 = 7{,}85 \cdot 10^3\ н/м^3$.

d_1 — ?

Решение

Пусть P_1 — вес пробки, d_1 — ее удельный вес, P_2 — вес свинца, d_2 — его удельный вес. Тогда объем пробки $V_1 = \frac{P_1}{d_1}$; объем свинца $V_2 = \frac{P_2}{d_2}$; общий объем пробки и свинца

$$V = V_1 + V_2 = \frac{P_1}{d_1} + \frac{P_2}{d_2}.$$

Согласно закону Архимеда, на погруженное в жидкость тело действует выталкивающая сила P (в нашем случае $P = P_1 + P_2 - P_3$), равная весу вытесненной жидкости в объеме погруженного тела

$$P = Vd_3,$$

где d_3 — удельный вес керосина.

Отсюда

$$\frac{P_1 + P_2 - P_3}{d_3} = \frac{P_1}{d_1} + \frac{P_2}{d_2}.$$

Решая полученное уравнение относительно искомой величины d_1, получаем

$$d_1 = \frac{P_1 d_2 d_3}{(P_1 + P_2 - P_3)\, d_2 - P_2 d_3};$$

подставив численные значения, найдем

$$d_1 = 1{,}96 \cdot 10^3\ н/м^3.$$

81. На поверхности воды плавает цилиндрический сосуд, площадь дна которого S. В сосуд налита вода до высоты h_0. Погружение сосуда при этом равно H_0 (рис. 47, *а*). Как изменятся h_0 и H_0, если внутрь сосуда поместить плавающее тело весом P, имеющее форму куба?

Решение

Изменение веса плавающего в воде цилиндра по закону Архимеда должно быть равно изменению выталкивающей силы при большем погружении его в воду. Цилиндр опускается при погружении в него тела, вес которого P (рис. 47, *б*). Можно написать

$$(H - H_0)\rho g S = P$$

или

$$H - H_0 = \frac{P}{\rho g S},$$

откуда

$$H = H_0 + \frac{P}{\rho g S}.$$

В свою очередь $(h - h_0)\rho g S = P$ и $h = h_0 + \frac{P}{\rho g S}$. Это справедливо, если не учитывать толщину стенок сосуда.

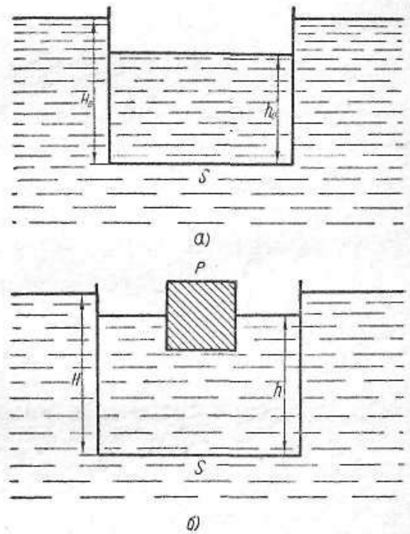


Рис. 47

82. Баллон весом 100 $кГ$ содержит 1000 $м^3$ водорода при 20° С и 740 *мм рт. ст.* К нему привязана гондола весом 404 $кГ$. Какая сила действует на лины в момент старта?

Дано:

$F = 100\ кГ = 980\ н$;
$V = 1000\ м^3$;
$t = 20°\ С$;
$p' = 740\ мм\ рт.\ ст.$;
$F_1 = 404\ кГ = 3964\ н$.

F_x — ?

Решение

Определим сначала выталкивающую силу, действующую на баллон. Удельный вес воздуха и водорода при 0° C и давлении 760 *мм рт. ст.* составляет:

$$d_{\text{в}} = 12{,}684\ н/м^3;\ d_{\text{н}_2} = 0{,}883\ н/м^3.$$

Исходя из известных законов

$$pV = MBT \text{ и } d = \frac{Mg}{V},$$

получим

$$d'_{\text{н}_2} = \frac{p'}{p} \cdot \frac{273}{273+t} d_{\text{н}_2},$$

где $d'_{\text{н}_2}$ — плотность водорода при $t = 20°$ C и давлении $p' = 740$ *мм рт. ст.* Аналогично для воздуха

$$d'_{\text{в}} = \frac{p'}{p} \cdot \frac{273}{273+t} d_{\text{в}}.$$

После подстановки численных значений получим

$$d'_{\text{н}_2} = 0{,}801\ н/м^3 \text{ и } d'_{\text{в}} = 11{,}407\ н/м^3.$$

Выталкивающая сила по закону Архимеда

$$F_2 = (d'_{\text{в}} - d'_{\text{н}_2})V,\ F_2 = 10\,600\ н.$$

Тогда ускорение системы в момент старта

$$a = \frac{F_2 - (F + F_1)}{m_{\text{н}_2} + m_{\text{б}} + m_{\text{г}}},$$

где $m_{\text{б}}$ — масса баллона; $m_{\text{г}}$ — масса гондолы; $m_{\text{н}_2} = d'_{\text{н}_2} = 82$ *кг*.

Натяжение лин $F' = m_{\text{г}}a$. На лины действует еще сила веса гондолы. Тогда полное натяжение лин составляет

$$F_x = F' + F_1 = \frac{F_2 - (F + F_1)}{m_{\text{н}_2} + m_{\text{б}} + m_{\text{г}}} \cdot m_{\text{г}} + F_1 = \frac{(F_2 - F)\,m_{\text{г}} + F_1(m_{\text{н}_2} + m_{\text{б}})}{m_{\text{н}_2} + m_{\text{б}} + m_{\text{г}}},$$

$$F_x = \frac{(10\,600\ н - 980\ н)\,404\ кг + 3964\ н\,(82\ кг + 100\ кг)}{82\ кг + 100\ кг + 404\ кг} \approx 7850\ н.$$

83. Два тела плотностью ρ_1 и ρ_2 в пустоте имеют один и тот же вес. Их подвешивают к концам рычага и помещают в жидкость плотностью ρ. Каково должно быть отношение плеч рычага, чтобы не нарушилось равновесие?

Решение

Обозначим через V_1 и V_2 объемы обоих тел, через P — их вес в пустоте и через l_1 и l_2 — плечи рычага.

В жидкости вес тел соответственно равен:

$$P_1 = P - \rho g V_1 \text{ и } P_2 = P - \rho g V_2.$$

При равновесии

$$(P - \rho g V_1)\,l_1 = (P - \rho g V_2)\,l_2,$$

откуда

$$\frac{l_1}{l_2} = \frac{P - \rho g V_2}{P - \rho g V_1}.$$

Но

$$V_1 = \frac{P}{\rho_1 g} \text{ и } V_2 = \frac{P}{\rho_2 g},$$

поэтому

$$\frac{l_1}{l_2} = \frac{P\left(1 - \frac{\rho}{\rho_1}\right)}{P\left(1 - \frac{\rho}{\rho_2}\right)} = \frac{\rho_2(\rho_1 - \rho)}{\rho_1(\rho_2 - \rho)}.$$

84. Вывести формулу поправки, которую надо вносить при взвешивании в воздухе на рычажных весах тела плотностью ρ с помощью гирь плотностью ρ_1, если плотность воздуха ρ_0.

Решение

Обозначим все величины, относящиеся к гирям, индексом 1. Тогда вес гирь в воздухе будет равен

$$P'_1 = P_1 - \Delta P_1,$$

где P_1 — вес гирь, отнесенный к вакууму; ΔP_1 — потеря в весе в воздухе:

$$P_1 = m_1 g = \rho_1 V_1 g;$$
$$\Delta P_1 = m'_0 g = \rho_0 V_1 g,$$

где V_1 — объем, занимаемый гирями.

Вес тела в воздухе равен

$$P' = P - \Delta P,$$
$$\Delta P = m_0 g = \rho_0 V g,$$
$$P = mg = \rho V g,$$

где V — объем, занимаемый взвешиваемым телом.

При равновесии весов $P' = P'_1$:

$$P'_1 = \rho_1 V_1 g - \rho_0 V_1 g = V_1 g (\rho_1 - \rho_0) =$$
$$= V_1 g \rho_1 \left(1 - \frac{\rho_0}{\rho_1}\right) = P_1 \left(1 - \frac{\rho_0}{\rho_1}\right);$$
$$P' = \rho V g - \rho_0 V g = V g (\rho - \rho_0) =$$
$$= V g \rho \left(1 - \frac{\rho_0}{\rho}\right) = P \left(1 - \frac{\rho_0}{\rho}\right).$$

Приравнивая правые части для P' и P'_1, получаем

$$P_1 \left(1 - \frac{\rho_0}{\rho_1}\right) = P \left(1 - \frac{\rho_0}{\rho}\right),$$

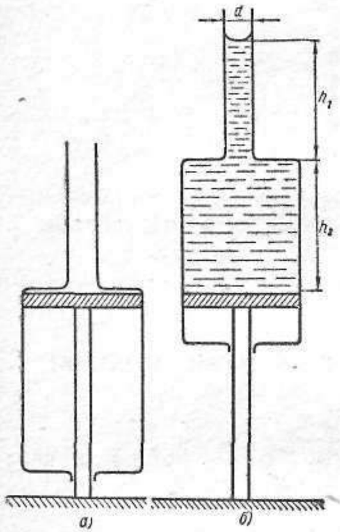


Рис. 48

откуда

$$P = P_1 \frac{1 - \frac{\rho_0}{\rho_1}}{1 - \frac{\rho_0}{\rho}}.$$

Замечая, что обычно ρ_1 и $\rho \gg \rho_0$, и пользуясь формулами приближенного умножения и деления, перепишем предыдущую формулу в виде

$$P = P_1 \left(1 - \frac{\rho_0}{\rho_1} + \frac{\rho_0}{\rho}\right)$$

или

$$P = P_1 \left[1 - \rho_0 \left(\frac{1}{\rho_1} - \frac{1}{\rho}\right)\right].$$

При взвешивании тел с относительно большим весом приведенной выше поправкой можно пренебречь, так как выражение, стоящее в скобках, будет мало отличаться от единицы.

85. Цилиндр с внутренним диаметром 10 *см* и длиной 20 *см*, заканчивающийся сверху трубкой с внутренним диаметром 4 *см*, может свободно двигаться относительно поршня. Первоначально он находится в положении *а* (рис. 48). Через трубку наливают 2 *л* воды. Определить, на какую высоту над поршнем поднимается верхняя стенка цилиндра, если вес его вместе с трубкой 6,6 *кГ*.

Дано:

$V = 2$ *л* $= 2 \cdot 10^{-3}$ *м*^{3};
$P_1 = 6{,}6$ *кГ* $= 64{,}7$ *н*;
$D = 10$ *см* $= 0{,}1$ *м*;
$d = 4$ *см* $= 0{,}04$ *м*;
$\rho = 1$ *г/см*^{3} $= 1000$ *кг/м*^{3};
$g = 9{,}8$ *м/сек*^{2}.

h_2 — ?

Решение

Объем воды в цилиндре составляет $\frac{\pi D^2}{4} h_2$, в трубке $\frac{\pi d^2}{4} h_1$, где h_1 — высота столбика воды в трубке (рис. 48, *б*). Тогда объем воды в цилиндре и трубке будет равен

$$V = \frac{\pi D^2}{4} h_2 + \frac{\pi d^2}{4} h_1.$$

Давление воды на верхнюю стенку цилиндра

$$p_1 = \rho g h_1,$$

где ρ — плотность воды.
Тогда сила, действующая на верхнюю часть поверхности цилиндра, равна

$$F = \frac{\pi}{4} \rho g h_1 (D^2 - d^2).$$

Отсюда

$$h_1 = \frac{4F}{\pi \rho g (D^2 - d^2)}.$$

Подставляя выражение для h_1 в ранее полученное уравнение, найдем

$$V = \frac{\pi D^2}{4} h_2 + \frac{\pi d^2}{4} \cdot \frac{4F}{\pi \rho g (D^2 - d^2)}.$$

Откуда

$$h_2 = \frac{4\left(\rho g V - \frac{d^2 F}{D^2 - d^2}\right)}{\pi \rho g D^2}.$$

Учитывая, что сила F, действующая на верхнюю часть поверхности цилиндра, равна его весу P_1, после подстановки численных значений получим

$$h_2 = 9{,}46 \text{ см}.$$

86. Определить скорость воды в струе, вытекающей из наконечника, находящегося на высоте 1 *м* над полом, в момент падения ее на пол, если начальная скорость вытекания струи под углом 45° к горизонту 3 *м/сек*.

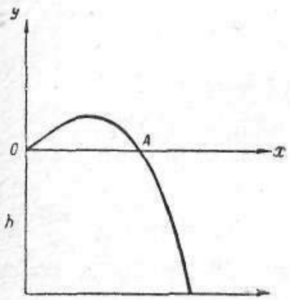


Рис. 49

Дано:

$h = 1$ *м*;
$\alpha = 45°$;
$v_0 = 3$ *м/сек*;
$g = 9{,}8$ *м/сек*^{2}.

v — ?

Решение

Скорость выделенной части струи при нахождении ее в точке A (рис. 49) будет по величине равна начальной скорости v_0. Следовательно, кинетическая энергия ее при нахождении в этой точке будет

$$E_{\text{к}_0} = \frac{mv_0^2}{2},$$

где m — масса воды выделенной части струи.

При дальнейшем движении до точки падения эта часть струи, находясь под действием только силы тяжести, опустилась на высоту h. Работа силы тяжести зависит только от высоты h падения струи. Поэтому работа силы тяжести будет равна

$$E_{\text{п}} = mgh.$$

При отсутствии сопротивления воздуха эта работа пошла на увеличение кинетической энергии движущейся части струи по параболе от точки A до точки падения. Поэтому в момент падения части струи на пол ее кинетическая энергия будет

$$E_{\text{к}} = E_{\text{к}_0} + E_{\text{п}}$$

или

$$\frac{mv^2}{2} = \frac{mv_0^2}{2} + mgh,$$

где v — скорость воды в струе в момент падения.

Решая последнее уравнение относительно v, найдем

$$v = \sqrt{v_0^2 + 2gh}.$$

Это выражение показывает, что скорость тела, брошенного под углом к горизонту, зависит от начальной скорости тела и от высоты нахождения его в данный момент времени над местом бросания и что она совершенно не зависит от угла бросания.

Следовательно, предыдущая формула справедлива и для тех случаев, когда брошенное тело находится в точках параболы, расположенных не ниже, а выше горизонтали, проведенной из точки бросания. Для этих случаев h необходимо считать величиной отрицательной.

Подставляя значения v_0, h, g, найдем, что искомая скорость равна

$$v = \sqrt{(3^2 + 2\cdot 9{,}8\cdot 1)\ \text{м}^2/\text{сек}^2} \approx 5{,}3\ \text{м/сек}.$$

87. Из вертикальной трубки высыпается песок, причем его струя сохраняет диаметр трубки (рис. 50). Скорость песка в момент высыпания из трубки 2 *м/сек*, а его средняя плотность 1,8 *г/см*^{3}. Какова средняя плотность струи на расстоянии 4,9 *м* от отверстия трубки?

Дано:

$v_0 = 2$ *м/сек*;
$\rho_0 = 1{,}8$ *г/см*^{3} $= 1800$ *кг/м*^{3};
$h = 4{,}9$ *м*;
$g = 9{,}8$ *м/сек*^{2}.

ρ — ?

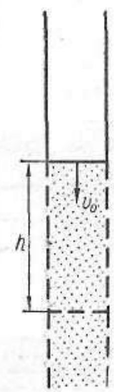


Рис. 50

Решение

Подсчитаем количество песка, вытекающего за единицу времени из трубки. Обозначим через S площадь сечения трубки. Количество песка, протекающего через любое сечение, должно быть одинаково, в противном случае он будет накапливаться в каком-либо месте.

Тогда

$$\rho v S = \rho_0 v_0 S,$$

откуда

$$\rho = \rho_0 \frac{v_0}{v}.$$

Согласно законам свободного падения (см. задачу 86),

$$v = \sqrt{v_0^2 + 2gh}.$$

Тогда

$$\rho = \frac{\rho_0 v_0}{\sqrt{v_0^2 + 2gh}}.$$

Подставив численные значения, получим

$$\rho = \frac{1800\ кг/м^3 \cdot 2\ м/сек}{\sqrt{4\ м^2/сек^2 + 2 \cdot 9{,}8\ м/сек^2 \cdot 4{,}9\ м}} = 360\ кг/м^3.$$

88. Цилиндрический сосуд имеет в боковой стенке два отверстия, расположенные на расстоянии 25 *см* одно над другим. В сосуд налита вода до уровня на 25 *см* выше верхнего отверстия. Определить положение точки пересечения струй воды, вытекающих из отверстий (рис. 51).

Дано:

$CB = CD = h_1 = 25\ см = 0{,}25\ м;$
$g = 9{,}8\ м/сек^2.$

$DK = H - ?\ KA = l - ?$

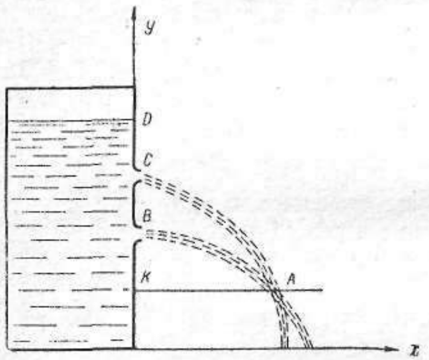


Рис. 51

Решение

Скорость вытекания воды из отверстия B

$$v_1 = \sqrt{4gh_1}.$$

Скорость вытекания воды из отверстия C

$$v_2 = \sqrt{2gh_1}.$$

Пересечение струи из отверстия B со струей из отверстия C произойдет на расстоянии

$$l = v_1 \sqrt{\frac{2h}{g}},$$

где $h = BK$.

Аналогично и для струи, вытекающей из отверстия C,

$$l = v_2 \sqrt{\frac{2(h_1 + h)}{g}}.$$

Приравнивая правые части двух последних равенств и учитывая два первых, получим

$$\sqrt{4gh_1} \sqrt{\frac{2h}{g}} = \sqrt{2gh_1} \sqrt{\frac{2(h_1 + h)}{g}}.$$

Решение указанного уравнения относительно h_1 дает

$$h_1 = h = 0{,}25\ м.$$

Тогда

$$H = h + h + h = 0{,}75\ м.$$

Определим l:

$$l = \sqrt{4gh_1} \sqrt{\frac{2h}{g}} = \sqrt{8h^2} = 2h\sqrt{2},$$

$$l = 2 \cdot 0{,}25\ м \sqrt{2} = 0{,}71\ м.$$

89. К водопроводному крану с помощью резиновой трубки присоединена стеклянная трубка длиной 1 *м* с внутренним поперечным сечением 0,3 *см*². Трубка изогнута снизу (рис. 52, *а*). Определить, на какой угол отклонится трубка, если из нее вытекает вода со скоростью 2 *м/сек*, а масса трубки 80 *г*.

Дано:

$l = 1\ м;$
$S = 0{,}3\ см^2 = 3 \cdot 10^{-5}\ м^2;$
$v = 2\ м/сек;$
$m_{тр} = 80\ г = 0{,}08\ кг;$
$\rho = 1000\ кг/м^3;$
$g = 9{,}8\ м/сек^2.$

$\alpha - ?$

Решение

Вытекающая из отверстия струя жидкости действует на трубку с силой F (рис. 52, *б*) и отклоняет ее на угол α. Вес трубки с находящейся в ней жидкостью разложится на силу N, стремящуюся вернуть трубку в положение равновесия, и силу T, ускоряющую движение жидкости. Равновесие наступит тогда, когда моменты сил F и N относительно точки O будут равны:

$$Fl = N\frac{l}{2},$$

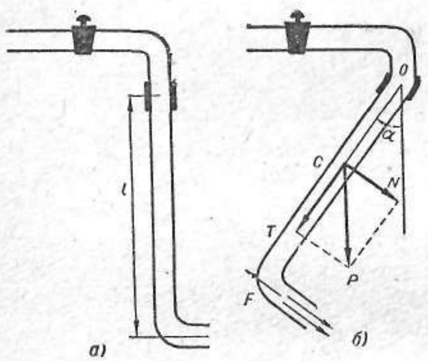


Рис. 52

откуда

$$F = \frac{N}{2}.$$

Из $\triangle NCP$ вытекает, что сила $N = P\sin\alpha$. Тогда

$$F = \frac{P\sin\alpha}{2} \text{ и } \sin\alpha = \frac{2F}{P}.$$

Если из трубки за время t вытекает количество воды m, то, согласно второму закону Ньютона, $Ft = mv$.

Так как

$$m = \rho vtS$$

(где ρ — плотность воды), то

$$Ft = \rho vtS\cdot v.$$

Откуда

$$F = \rho v^2 S.$$

Вес трубки с жидкостью равен

$$P = P_{\text{тр}} + P_{\text{ж}} = m_{\text{тр}}g + \rho glS.$$

Подставляя значения F и P в уравнение $\sin\alpha = \frac{2F}{P}$, получим

$$\sin\alpha = \frac{2\rho v^2 S}{m_{\text{тр}}g + \rho glS}.$$

После подстановки численных значений

$$\sin\alpha = \frac{2\cdot 1000\ \text{кг/м}^3\cdot 4\ \text{м}^2/\text{сек}^2\cdot 3\cdot 10^{-5}\ \text{м}^2}{0{,}08\ \text{кг}\cdot 9{,}8\ \text{м/сек}^2 + 1000\ \text{кг/м}^3\cdot 9{,}8\ \text{м/сек}^2\cdot 1\ \text{м}\cdot 3\cdot 10^{-5}\ \text{м}^2} =$$
$$= 0{,}222;\ \alpha = 12°50'.$$

90. Под поверхностью реки, скорость течения которой 5 *м/сек*, установлен гидравлический таран (рис. 53). Принцип действия его

следующий: если клапан K_2 открыт, то по трубе будет протекать вода со скоростью v. Если клапан K_2 закрыт (он закрывается автоматически при определенной скорости течения воды), то вода в трубе остановится и за счет ее кинетической энергии будет выполнена работа по поднятию какого-то количества воды на высоту h. Определить, какое количество воды поднимается тараном за сутки на высоту 25 *м*, если длина трубы тарана 4,9 *м*, диаметр ее 16 *см* и каждый клапан открывается 30 раз в минуту.

Дано:

$v = 5$ *м/сек*;
$h = 25$ *м*;
$l = 4{,}9$ *м*;
$d = 16$ *см* $= 0{,}16$ *м*;
$t = 24\cdot 60\cdot 60$ *сек*;
$n = 0{,}5$ *сек*$^{-1}$;
$\rho = 1000$ *кг/м*^{3}.

m_x — ?

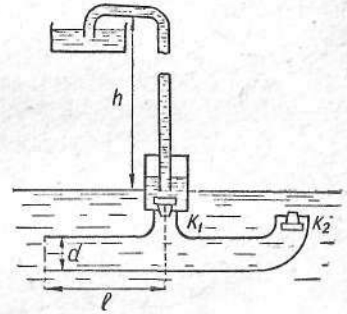


Рис. 53

Решение

Процесс действия тарана при одном закрытии клапана K_2 может быть описан уравнением

$$\frac{mv^2}{2} = m_1 gh,$$

где m — масса движущейся в трубе воды; v — скорость воды в трубе; m_1 — масса порции воды, поднимающейся при одном закрытии клапана; h — высота подъема.

Из вышеприведенного уравнения следует, что

$$m_1 = \frac{mv^2}{2gh}.$$

Масса воды, поднимаемой тараном за время t, будет равна

$$m_x = m_1 nt = \frac{mnv^2 t}{2gh},$$

где n — число закрытий клапана K_2 в секунду. Но

$$m = \rho V = \rho lS = \frac{\rho l\pi d^2}{4},$$

где ρ — плотность воды.

Таким образом,

$$m_x = \frac{\pi \rho l d^2 v^2 n t}{8gh},$$

$$m_x = \frac{3{,}14 \cdot 1000\ кг/м^3 \cdot 4{,}9\ м \cdot 0{,}16^2\ м^2 \cdot 5^2\ м^2/сек^2 \cdot 0{,}5\ сек^{-1} \cdot 24 \cdot 60 \cdot 60\ сек}{8 \cdot 9{,}8\ м/сек^2 \cdot 25\ м} =$$

$$= 2{,}17 \cdot 10^5\ кг.$$

91. Из бака, наполненного водой, через трубку (рис. 54) в течение 1 *мин* вытекает 24 *л* воды. Определить величину и направление реакции вытекающей жидкости, если площадь сечения трубки 2 *см*^{2}.

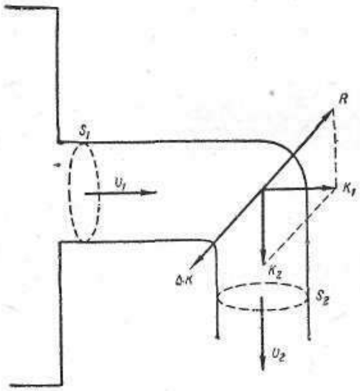


Рис. 54

Дано:

$t = 1$ *мин* $= 60$ *сек*;
$V = 24$ *л* $= 0{,}024$ *м*^{3};
$S = 2$ *см*$^2 = 2 \cdot 10^{-4}$ *м*^{2};
$\rho = 1$ *г/см*$^3 = 1000$ *кг/м*^{3}.

R — ?

Решение

Так как сечение изогнутой трубки везде одно и то же, то при течении жидкости по изогнутой части трубки количество движения жидкости, протекающей за единицу времени через сечение трубки, будет оставаться постоянным по величине, но будет изменяться по направлению.

Определим это изменение количества движения.

Пусть за единицу времени через сечение $S = S_1$ (рис. 54) втекает в изогнутую часть трубки масса жидкости

$$m = \rho S v,$$

где v — численное значение скорости течения воды по трубке; ρ — плотность воды.

Эта масса воды приносит с собой количество движения

$$\vec{K}_1 = \rho S v \vec{v}_1,$$

где $\vec{v}_1$ — вектор скорости воды в сечении S_1.

Через сечение $S_2 = S_1$ за то же время вытекает такая же масса жидкости. Эта масса уносит с собой количество движения

$$\vec{K}_2 = \rho S v \vec{v}_2,$$

где $\vec{v}_2$ — вектор скорости в сечении S_2.

Изменение же количества движения указанной массы воды за 1 *сек* при протекании по изогнутой части трубки будет равно

$$\Delta\vec{K} = \vec{K}_2 - \vec{K}_1 = \rho S v (\vec{v}_2 - \vec{v}_1).$$

Так как на величину $\Delta\vec{K}$ количество движения воды изменяется за 1 *сек*, то $\Delta\vec{K}$ должно быть равно по величине и направлению равнодействующей всех сил, действующих на жидкость со стороны стенок трубки.

Обозначая эту силу через F, можем, следовательно, написать

$$\vec{F} = \Delta\vec{K} = \rho S v (\vec{v}_2 - \vec{v}_1).$$

Если стенки действуют на жидкость с силой F, то по третьему закону Ньютона и жидкость будет действовать на эту часть трубки с той же по величине и противоположной по направлению силой. Эта сила носит название силы реакции вытекающей жидкости. Сила реакции, согласно сказанному, будет равна

$$\vec{R} = -\vec{F} = \rho S v (\vec{v}_1 - \vec{v}_2).$$

Для определения величины R необходимо найти v и $\vec{v}_1 - \vec{v}_2$, так как остальные величины даны в задаче.

Сначала найдем величину v. Известны объем жидкости V, вытекающей из бака за 1 *мин*, и площадь сечения трубки S. Исходя из этих данных, найдем, что

$$v = \frac{V}{tS}.$$

Так как численные значения $\vec{v}_1$ и $\vec{v}_2$ равны v, а по направлению они перпендикулярны друг другу, то

$$\left|\vec{v}_1 - \vec{v}_2\right| = \sqrt{2}\,\frac{V}{tS}.$$

Подставляя вместо v и $\left|\vec{v}_1 - \vec{v}_2\right|$ их значения в уравнение $R = \rho S v \left|\vec{v}_1 - \vec{v}_2\right|$, получим

$$R = \rho \frac{V^2}{t^2 S} \sqrt{2}.$$

Решая задачу, найдем

$$R = 1000 \text{ кг/м}^3 \frac{0{,}024^2 \text{ м}^6}{3600 \text{ сек}^2 \cdot 2 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2} \cdot 1{,}4 = 1{,}12 \text{ н}.$$

ГЛАВА II

ТЕПЛОТА И МОЛЕКУЛЯРНАЯ ФИЗИКА

ТЕПЛОВОЕ РАСШИРЕНИЕ ТВЕРДЫХ И ЖИДКИХ ТЕЛ

92. Две линейки — медная и железная — наложены одна на другую так, что они совпадают только с одной стороны. Определить длины линеек при 0° С, зная, что разность их длин при любой температуре составляет 10 *см*. Коэффициент линейного расширения меди $17 \cdot 10^{-6}$, а железа $12 \cdot 10^{-6}$ *град*$^{-1}$.

Дано:

$\Delta l = 10$ *см* $= 0{,}1$ *м*;
$\alpha_1 = 17 \cdot 10^{-6}$ *град*$^{-1}$;
$\alpha_2 = 12 \cdot 10^{-6}$ *град*$^{-1}$.

l_{01} — ? l_{02} — ?

Решение

Обозначим длины медной и железной линеек соответственно через l_{1t} и l_{2t} (рис. 55). Длины медной и железной линеек при любых температурах будут равны:

$$l_{1t} = l_{01}(1 + \alpha_1 t);$$

$$l_{2t} = l_{02}(1 + \alpha_2 t).$$

По условию задачи

$$l_{2t} - l_{1t} = l_{02} - l_{01} = \Delta l,$$

откуда

$$\frac{l_{01}}{l_{02}} = \frac{\alpha_2}{\alpha_1}.$$

Начальные длины линеек должны быть обратно пропорциональны коэффициентам линейного расширения.

Решая систему уравнений

$$\frac{l_{01}}{l_{02}} = \frac{\alpha_2}{\alpha_1}; \; l_{02} - l_{01} = \Delta l,$$

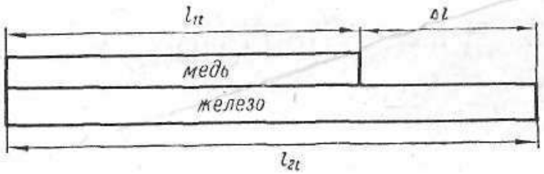


Рис. 55

находим, что

$$l_{01} = \frac{\Delta l \cdot \alpha_2}{\alpha_1 - \alpha_2}; \; l_{02} = \frac{\Delta l \cdot \alpha_1}{\alpha_1 - \alpha_2}.$$

После подстановки численных значений получим

$$l_{01} = \frac{0{,}1 \; м \cdot 12 \cdot 10^{-6} \; град^{-1}}{5 \cdot 10^{-6} \; град^{-1}} = 0{,}24 \; м;$$

$$l_{02} = \frac{0{,}1 \; м \cdot 17 \cdot 10^{-6} \; град^{-1}}{5 \cdot 10^{-6} \; град^{-1}} = 0{,}34 \; м.$$

93. К медному стержню длиной 1 *м* при температуре 0° С присоединен алюминиевый стержень длиной 0,5 *м*. Коэффициенты линейного расширения меди и алюминия соответственно равны $1{,}7 \cdot 10^{-5}$ *град*$^{-1}$ и $2{,}4 \cdot 10^{-5}$ *град*$^{-1}$. Чему равен средний коэффициент линейного расширения всей системы?

Дано:

$t_0 = 0°$ C;
$l_{01} = 1$ *м*;
$l_{02} = 0{,}5$ *м*;
$\alpha_1 = 1{,}7 \cdot 10^{-5}$ *град*$^{-1}$;
$\alpha_2 = 2{,}4 \cdot 10^{-5}$ *град*$^{-1}$.

α — ?

Решение

При некоторой температуре t длины медного и алюминиевого стержней соответственно равны:

$$l_1 = l_{01}(1 + \alpha_1 t) \text{ и } l_2 = l_{02}(1 + \alpha_2 t).$$

Соединенные стержни будут иметь общую длину

$$l = l_1 + l_2 = l_{01} + l_{02} + (\alpha_1 l_{01} + \alpha_2 l_{02})\, t =$$
$$= (l_{01} + l_{02})\left(1 + \frac{\alpha_1 l_{01} + \alpha_2 l_{02}}{l_{01} + l_{02}}\, t\right).$$

Сравнивая полученное выражение с формулой длины тела при любой температуре $l = l_0(1 + \alpha t)$, находим

$$\alpha = \frac{l_{01}\alpha_1 + l_{02}\alpha_2}{l_{01} + l_{02}}.$$

После подстановки численных значений

$$\alpha = \frac{1 \; м \cdot 1{,}7 \cdot 10^{-5} \; град^{-1} + 0{,}5 \; м \cdot 2{,}4 \cdot 10^{-5} \; град^{-1}}{1{,}5 \; м} \approx 1{,}9 \cdot 10^{-5} \; град^{-1}.$$

94. Колесо паровоза имеет радиус 1 *м* при 0° С. Определить разницу в числах оборотов колеса летом при температуре 25° С и зимой при температуре — 25° С на пути пробега паровоза, равном 100 *км* ($\alpha = 1{,}2 \cdot 10^{-5}$ *град*$^{-1}$).

Дано:

$r_0 = 1$ *м*;
$t_1 = 25°$ C;
$t_2 = -25°$ C;
$\alpha = 1{,}2 \cdot 10^{-5}$ *град*$^{-1}$;
$s = 100$ *км* $= 10^5$ *м*.

Δn — ?

Решение

При изменении температуры меняются и все линейные размеры колеса. При температурах t_1 и t_2 радиус колеса соответственно равен:

$$r_1 = r_0(1 + \alpha t_1); \; r_2 = r_0(1 + \alpha t_2).$$

Длина окружности колеса определяется формулами:

$$2\pi r_1 = 2\pi r_0(1 + \alpha t_1);$$
$$2\pi r_2 = 2\pi r_0(1 + \alpha t_2).$$

В соответствии с этим число оборотов n_1 и n_2, которые совершит колесо паровоза на пути s, может быть подсчитано по формулам:

$$n_1 = \frac{s}{2\pi r_1} = \frac{s}{2\pi r_0(1+\alpha t_1)};$$

$$n_2 = \frac{s}{2\pi r_2} = \frac{s}{2\pi r_0(1+\alpha t_2)}.$$

Разность этих двух величин и дает искомый результат

$$\Delta n = \frac{s}{2\pi r_0}\left(\frac{1}{1+\alpha t_2} - \frac{1}{1+\alpha t_1}\right),$$

$$\Delta n = \frac{\alpha s(t_1-t_2)}{2\pi r_0(1+\alpha t_1)(1+\alpha t_2)} \approx \frac{\alpha s(t_1-t_2)}{2\pi r_0[1+\alpha(t_1+t_2)]},$$

$$\Delta n \approx 9{,}6 \text{ оборота.}$$

95. Медный лист размером $0{,}6 \times 0{,}5$ $м^2$ при $20°$ С нагревается до $600°$ С. Как при этом изменяется его площадь?

Дано:

$l_1 = 0{,}6$ *м*;
$l_2 = 0{,}5$ *м*;
$t_1 = 20°$ С;
$t_2 = 600°$ С;
$\alpha = 17 \cdot 10^{-6}$ *град*$^{-1}$.

ΔS — ?

Решение

Прежде всего найдем размеры листа при $t_2°$ С. Используя формулы линейного расширения, получаем:

$$l_1' = l_1[1+\alpha(t_2-t_1)];$$

$$l_2' = l_2[1+\alpha(t_2-t_1)].$$

Площадь медного листа при температуре t_2 будет равна

$$S = l_1' l_2' = l_1 l_2[1+\alpha(t_2-t_1)]^2.$$

Принимая во внимание незначительность коэффициента α и пренебрегая членом $[\alpha(t_2-t_1)]^2$, получаем

$$S = l_1 l_2[1+2\alpha(t_2-t_1)],$$

$$S = 0{,}6 \text{ м} \cdot 0{,}5 \text{ м}(1+2 \cdot 17 \cdot 10^{-6} \text{ град}^{-1} \cdot 580 \text{ град}) \approx 0{,}3059 \text{ м}^2.$$

Таким образом, площадь листа увеличилась на $\Delta S = 0{,}3059$ $м^2$ — $0{,}3$ $м^2$ $= 0{,}0059$ $м^2$ (59 $см^2$).

96. Биметаллическая пластинка состоит из стальной и алюминиевой полосок толщиной 0,2 *мм* каждая. Температура $20°$ С. Какой радиус кривизны будет иметь пластинка при $100°$ С? Коэффициент линейного расширения алюминия $2{,}4 \cdot 10^{-5}$, а стали $1{,}1 \cdot 10^{-5}$ *град*$^{-1}$.

Дано:

$d = 0{,}2$ *мм* $= 2 \cdot 10^{-4}$ *м*;
$\Delta t = 80°$ С;
$\alpha_1 = 2{,}4 \cdot 10^{-5}$ *град*$^{-1}$;
$\alpha_2 = 1{,}1 \cdot 10^{-5}$ *град*$^{-1}$.

r — ?

Решение

Средний радиус кривизны пластинки обозначим через r, а толщину каждого слоя через d. Среднюю длину алюминиевого слоя обозначим через CB, а стального — через DE (рис. 56).

Тогда:

$$\beta\left(r+\frac{d}{2}\right) = CB;$$

$$\beta\left(r-\frac{d}{2}\right) = DE.$$

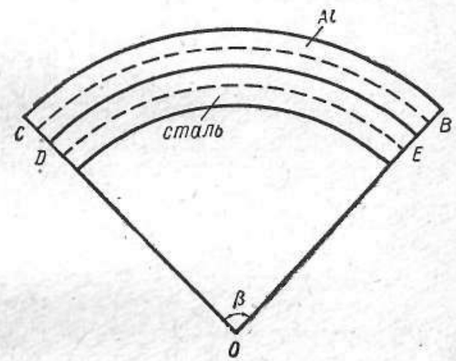


Рис. 56

Если первоначальную длину пластинок обозначим через l_0, то:

$$CB = l_0(1+\alpha_1\Delta t);$$

$$DE = l_0(1+\alpha_2\Delta t),$$

где α_1 — коэффициент линейного расширения алюминия; α_2 — коэффициент линейного расширения стали.

Разность длин дуг CB и DE составляет

$$\Delta l = CB - DE = \beta r + \beta\frac{d}{2} - \beta r + \beta\frac{d}{2} = \beta d$$

или

$$\Delta l = l_0 + l_0\alpha_1\Delta t - l_0 - l_0\alpha_2\Delta t = l_0(\alpha_1-\alpha_2)\Delta t,$$

откуда

$$l_0(\alpha_1 - \alpha_2)\,\Delta t = \beta d.$$

Из первого уравнения

$$\beta = \frac{CB}{r + \frac{d}{2}}.$$

Подставляя сюда значение CB, получим

$$\beta = \frac{l_0(1 + \alpha_1\Delta t)}{r + \frac{d}{2}}.$$

Полученное значение подставим в уравнение $l_0(\alpha_1 - \alpha_2)\,\Delta t = \beta d$:

$$l_0(\alpha_1 - \alpha_2)\,\Delta t = \frac{l_0(1 + \alpha_1\Delta t)}{r + \frac{d}{2}}\,d.$$

После решения данного уравнения найдем

$$r = \frac{2 + (\alpha_1 + \alpha_2)\,\Delta t}{2(\alpha_1 - \alpha_2)\,\Delta t}\,d.$$

Подставляя численные значения, получим

$$r = \frac{2 + (2{,}4\cdot10^{-5}\ \text{град}^{-1} + 1{,}1\cdot10^{-5}\ \text{град}^{-1})\,80\ \text{град}}{2\,(2{,}4\cdot10^{-5}\ \text{град}^{-1} - 1{,}1\cdot10^{-5}\ \text{град}^{-1})\,80\ \text{град}}\cdot 2\cdot10^{-4}\ \text{м} = 0{,}192\ \text{м}.$$

97. При температуре 0° С период колебаний математического маятника равен 2 *сек.* Чему равен период колебаний при 20° С, если коэффициент линейного расширения нити, на которой подвешен маятник, равен $1{,}8\cdot10^{-5}$ *град*$^{-1}$?

Дано:

$t_1 = 0°$ С;
$t_2 = 20°$ С;
$\alpha = 1{,}8\cdot10^{-5}$ *град*$^{-1}$;
$T_1 = 2$ *сек.*

T_2 — ?

Решение

Период колебания маятника при температуре t_1

$$T_1 = 2\pi\sqrt{\frac{l_0}{g}}.$$

Соответственно при температуре t_2

$$T_2 = 2\pi\sqrt{\frac{l_0(1 + \alpha t_2)}{g}}.$$

Тогда

$$T_2 = 2\pi\sqrt{\frac{l_0}{g}}\sqrt{1 + \alpha t_2} = T_1\sqrt{1 + \alpha t_2},$$

$$T_2 = 2\ \text{сек}\ \sqrt{1 + 1{,}8\cdot10^{-5}\ \text{град}^{-1}\cdot 20\ \text{град}} \approx 2{,}00036\ \text{сек}.$$

98. Железный маятник при температуре 30° С имеет период колебания 1 *сек.* При какой температуре период колебаний маятника уменьшится на $\frac{1}{10000}$ *сек*?

Дано:

$T_1 = 1$ *сек*;
$n = 10\,000$;
$t_1 = 30°$ С.

t_2 — ?

Решение

Периоды маятников при температуре t_1 и t_2 соответственно равны

$$T_1 = 2\pi\sqrt{\frac{l_1}{g}} \quad\text{и}\quad T_2 = T_1\left(1 - \frac{1}{n}\right) = 2\pi\sqrt{\frac{l_2}{g}},$$

где l_1 и l_2 — длины маятника соответственно при температурах t_1 и t_2.

Тогда

$$\frac{T_2}{T_1} = \frac{n-1}{n} = \sqrt{\frac{l_2}{l_1}}$$

или

$$\frac{(n-1)^2}{n^2} = \frac{l_2}{l_1}.$$

Но

$$\frac{l_2}{l_1} = \frac{l_0(1 + \alpha t_2)}{l_0(1 + \alpha t_1)} = 1 + \alpha(t_2 - t_1).$$

Поэтому можно написать, что

$$\frac{(n-1)^2}{n^2} = 1 + \alpha(t_2 - t_1).$$

Из последнего уравнения следует, что

$$t_2 = \frac{(n-1)^2}{n^2\alpha} + t_1 - \frac{1}{\alpha}.$$

После подстановки численных значений

$$t_2 = \frac{(10\,000-1)^2}{10^8 \cdot 1{,}2 \cdot 10^{-5}\ \text{град}^{-1}} + 30\ \text{град} - \frac{1}{1{,}2 \cdot 10^{-5}\ \text{град}^{-1}} \approx 20^\circ\,\text{C}.$$

99. Часы, маятник которых состоит из груза малых размеров и легкой латунной нити, идут правильно при 0° С. Найти коэффициент линейного расширения латуни, если при повышении температуры до 20° С часы отстают за сутки на 16 *сек.*

Дано:

$$\frac{\Delta T}{T_0} = \frac{16}{24 \cdot 3600};$$

$$t = 20^\circ\,\text{C}.$$

α — ?

Решение

Маятник часов можно принять за математический, так как по условию задачи он состоит из груза малых размеров и тонкой латунной нити. Период колебания маятника при $t_0 = 0^\circ$ С равен

$$T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{l_0}{g}}.$$

Если температура воздуха повысилась, то длина маятника увеличилась и стала равной $l = l_0(1+\alpha t)$. Период колебания маятника также увеличился

$$T_1 = 2\pi \sqrt{\frac{l_0(1+\alpha t)}{g}}.$$

Отношение периодов колебаний маятников при разных температурах равно

$$\frac{T_1}{T_0} = \sqrt{1+\alpha t} \approx 1 + \frac{\alpha t}{2}.$$

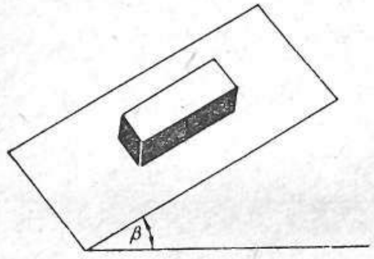
Отсюда

$$\frac{T_1 - T_0}{T_0} = \frac{\alpha t}{2}.$$

Обозначая $T_1 - T_0$ через ΔT, получим

$$\alpha = \frac{2 \cdot \Delta T}{T_0 t}, \qquad \alpha = \frac{2 \cdot 16}{24 \cdot 3600 \cdot 20\ \text{град}} = 18{,}5 \cdot 10^{-6}\ \text{град}^{-1}.$$

100. Плоская свинцовая пластинка, длина которой 30 *см* при 0° С, лежит на гладкой крыше (рис. 57, *а*). Угол наклона крыши к горизонту 20°. Пластинка удерживается на крыше благодаря силе трения (коэффициент трения равен 0,5).



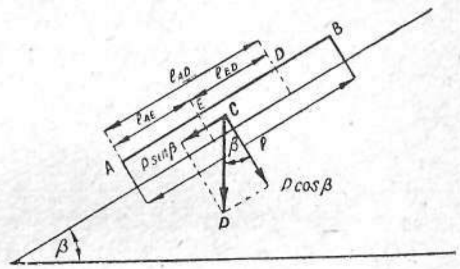


Рис. 57

Зимой утром температура пластинки равна — 20° С. В течение дня солнце нагревает ее до + 10° С, а ночью она снова остывает до — 20° С. Коэффициентом линейного расширения материала, из которого сделана крыша, пренебречь. Найти, на сколько пластинка сползет по крыше за сутки.

Дано:

$l_0 = 30\ \text{см} = 0{,}3\ \text{м};$
$k = 0{,}5;$
$\beta = 20^\circ;$
$\alpha = 2{,}9 \cdot 10^{-5}\ \text{град}^{-1};$
$t_2 = 10^\circ\,\text{C};$
$t_1 = -20^\circ\,\text{C}.$

Δl — ?

Решение

При нагревании большая часть пластинки *AD* движется вниз по скату крыши, а меньшая — *BD* — вверх (рис. 57, *б*). При охлаждении же неподвижным остается некоторое сечение *E*, лежащее ниже центра тяжести C. Теперь меньшая часть пластинки AE движется вверх, а большая BE — вниз. При этом сечение D, оставшееся неподвижным при нагревании, по окончании полного цикла нагрев — охлаждение переместится на некоторое расстояние Δl. Это означает, что вся пластинка также переместилась вниз по скату на длину Δl. Будем считать, что вся пластинка равномерно перемещается относительно ската крыши. Тогда алгебраическая сумма проекций всех сил, действующих на пластинку при ее нагревании, на направление крыши равна нулю, т. е.

$$P \sin \beta - F_1 + F_2 = 0,$$

где F_1 — сила трения, приложенная к части AD и направленная в сторону, противоположную скатывающей силе; F_2 — сила трения, приложенная к части BD пластинки и направленная вниз по скату.

Определим F_1 и F_2:

$$F_1 = kP_1 \cos \beta \text{ и } F_2 = kP_2 \cos \beta,$$

где P_1 и P_2 — веса частей AD и BD. В случае однородности пластинки P_1 и P_2 пропорциональны длинам частей l_{AD} и $l - l_{AD}$, т. е.

$$P_1 = P \frac{l_{AD}}{l}, \; P_2 = P \frac{l - l_{AD}}{l}.$$

Тогда

$$P \sin \beta - kP \frac{l_{AD}}{l} \cos \beta + kP \frac{l - l_{AD}}{l} \cos \beta = 0,$$

откуда получаем

$$l_{AD} = \frac{l}{2}\left(1 + \frac{\operatorname{tg} \beta}{k}\right).$$

Аналогично можно найти расстояние l_{AE} при охлаждении пластинки:

$$l_{AE} = \frac{l}{2}\left(1 - \frac{\operatorname{tg} \beta}{k}\right).$$

Расстояние же l_{ED} между сечениями E и D равно

$$l_{ED} = l_{AD} - l_{AE} = l \frac{\operatorname{tg} \beta}{k}.$$

При нагревании и охлаждении длина любой части пластинки изменяется в том же отношении, что и полная длина l.

Теперь можно определить расстояние Δl, на которое опустится пластинка вдоль ската за сутки. Пусть l'_{ED} — расстояние между

сечениями E и D при температуре t_1, l''_{ED} — то же расстояние при температуре t_2. Тогда

$$\Delta l = l''_{ED} - l'_{ED} = l^0_{ED}(1 + \alpha t_2) - l^0_{ED}(1 + \alpha t_1) = l^0_{ED}\alpha (t_2 - t_1),$$

где α — коэффициент линейного расширения.

Подставляя в предыдущее выражение вместо l^0_{ED} его значение ($l^0_{ED} = l_0 \frac{\operatorname{tg}\beta}{k}$, где l_0 — длина пластинки при 0°С), получим

$$\Delta l = l_0 \frac{\operatorname{tg}\beta}{k} \alpha (t_2 - t_1),$$

$$\Delta l = 0{,}3\, м \frac{0{,}364}{0{,}5} \cdot 2{,}9 \cdot 10^{-5} град^{-1} \cdot 30\, град = 1{,}9 \cdot 10^{-4}\, м = 0{,}19\, мм.$$

101. Мерная колба при температуре 20°С вмещает 339 *г* ртути, а при температуре 100°С — 335 *г*. Определить коэффициент объемного расширения материала сосуда.

Дано:

$t_1 = 20°С$;
$t_2 = 100°С$;
$m_1 = 339$ *г*;
$m_2 = 335$ *г*.

β_2 — ?

Решение

Определим плотность ртути при температуре t_1 и t_2:

$$\rho_1 = \frac{\rho_0}{1 + \beta_1 t_1}; \quad \rho_2 = \frac{\rho_0}{1 + \beta_1 t_2},$$

где ρ_0 — плотность ртути при 0°С; β_1 — коэффициент объемного расширения ртути.

Объем сосуда при температуре t_1 равен

$$V_1 = \frac{m_1}{\rho_1} = \frac{m_1 (1 + \beta_1 t_1)}{\rho_0},$$

при температуре t_2

$$V_2 = \frac{m_2}{\rho_2} = \frac{m_2 (1 + \beta_1 t_2)}{\rho_0}.$$

Объем сосуда при температуре 0°С, с одной стороны,

$$V_0 = \frac{V_1}{1 + \beta_2 t_1} = \frac{m_1 (1 + \beta_1 t_1)}{\rho_0 (1 + \beta_2 t_1)},$$

а с другой,

$$V_0 = \frac{V_2}{1+\beta_2 t_2} = \frac{m_2(1+\beta_1 t_2)}{\rho_0(1+\beta_2 t_2)}.$$

Приравнивая правые части, получим

$$\frac{m_1(1+\beta_1 t_1)}{\rho_0(1+\beta_2 t_1)} = \frac{m_2(1+\beta_1 t_2)}{\rho_0(1+\beta_2 t_2)},$$

откуда после решения относительно β_2

$$\beta_2 = \frac{m_1 - m_2 + \beta_1(m_1 t_1 - m_2 t_2)}{m_2 t_1 - m_1 t_2 + \beta_1(m_2 - m_1)t_1 t_2}.$$

Так как $\beta_1 = 1{,}8\cdot 10^{-4}$ *град*$^{-1}$, то после подстановки всех остальных величин получим

$$\beta_2 = 2{,}9\cdot 10^{-5}\ \textit{град}^{-1}.$$

102. Объем стеклянной колбы при 0°С равен 400 *см*^{3}. При этой температуре колба наполнена до краев ртутью. Затем ее нагревают до 100°С. При этом из колбы вытекает 6,12 *см*^{3} ртути. Определить коэффициент объемного расширения ртути.

Дано:

$V_0 = 400$ *см*^{3};
$t = 100$°С;
$\Delta V_{каж} = 6{,}12$ *см*^{3}.
β — ?

Решение

Коэффициент объемного расширения ртути можно найти из формулы

$$\beta = \frac{\Delta V_{ист}}{V_0 t}.$$

Истинное расширение ртути равно сумме увеличения объема колбы и кажущегося расширения ртути

$$\Delta V_{ист} = \Delta V_{ст} + \Delta V_{каж}.$$

Увеличение объема стеклянной колбы от нагревания

$$\Delta V_{ст} = 3\alpha_{ст} V_0 t,$$

где $\alpha_{ст}$ — коэффициент линейного расширения стекла. Тогда

$$\beta = \frac{3\alpha_{ст} V_0 t + \Delta V_{каж}}{V_0 t}.$$

Если для коэффициента линейного расширения стекла принять значение $\alpha = 0{,}000009$ *град*$^{-1}$, то после подстановки численных значений получим

$$\beta = 0{,}00018\ \textit{град}^{-1}.$$

103. В калориметре находятся два слоя воды: внизу — более холодная, сверху — более теплая. Изменится ли общий объем воды при выравнивании температур?

Решение

Обозначим через t установившуюся общую температуру, через m_1, V_1, t_1 — соответственно массу, объем и температуру более холодной воды, через V_1' — объем при температуре t, через m_2, V_2, t_2 — соответственно массу, объем и температуру более теплой воды, через V_2' — объем, который она примет при температуре t. Уравнение теплового баланса следующее:

$$cm_2(t_2 - t) = cm_1(t - t_1)$$

(теплоемкость c можно сократить).

С другой стороны, изменение объемов с температурой выразится так:

$$V_1 = \frac{m_1}{\rho_1} = \frac{m_1(1+\beta t_1)}{\rho_0},$$

где ρ_1 — плотность воды при температуре t_1; ρ_0 — ее плотность при 0°С; β — коэффициент объемного расширения (считаем его постоянным).

Аналогично:

$$V_1' = \frac{m_1(1+\beta t)}{\rho_0};\quad V_2 = \frac{m_2(1+\beta t_2)}{\rho_0};$$

$$V_2' = \frac{m_2(1+\beta t)}{\rho_0}.$$

Отсюда найдем изменения объемов:

$$V_2 - V_2' = \frac{m_2\beta(t_2 - t)}{\rho_0};$$

$$V_1' - V_1 = \frac{m_1\beta(t - t_1)}{\rho_0}.$$

Подставляя $m_2(t_2 - t) = m_1(t - t_1)$ в предыдущие две формулы, получаем

$$V_2 - V_2' = V_1' - V_1$$

или

$$V_2 + V_1 = V'_2 + V'_1,$$

т. е. общий объем жидкости не изменится.

104. В железной цилиндрической цистерне высотой 5 *м* и диаметром 5 *м* содержится керосин. При температуре 5°С керосин не доходит до края на 15 *см*. Рассчитать, при какой температуре керосин начал бы переливаться через край цистерны. Расчет сделать для двух случаев: без учета расширения цистерны и с учетом расширения.

Дано:

$h_1 = 5\,м;$
$d = 5\,м;$
$h_2 = 15\,см = 0{,}15\,м;$
$t_1 = 5°C;$
$\beta = 0{,}001\,град^{-1};$
$\beta_1 = 0{,}000036\,град^{-1}.$

$t_2 - ?\ t_3 - ?$

Решение

1-й случай. Объем керосина в цистерне при 5°С

$$V_1 = hS,$$

где

$$h = h_1 - h_2,\quad S = \frac{\pi d^2}{4}.$$

После подстановки этих выражений в уравнение получим

$$V_1 = (h_1 - h_2)\frac{\pi d^2}{4},$$

$$V_1 = \frac{4{,}85\,м \cdot 3{,}14 \cdot 25\,м^2}{4} = 95{,}18\ м^3.$$

Когда керосин при нагревании поднимется до края, его объем будет равен

$$V_2 = h_1 S = h_1\frac{\pi d^2}{4},$$

$$V_2 = \frac{5\,м \cdot 3{,}14 \cdot 25\,м^2}{4} = 98{,}12\ м^3.$$

Объемы V_1 и V_2 связаны соотношением

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{1 + \beta t_1}{1 + \beta t_2},$$

откуда

$$t_2 = \frac{V_2(1 + \beta t_1) - V_1}{V_1\beta}.$$

После подстановки в это равенство значений и вычислений получим

$$t_2 = \frac{98{,}12\,м^3\,(1 + 0{,}001\,град^{-1} \cdot 5\,град) - 95{,}18\,м^3}{95{,}18\,м^3 \cdot 0{,}001\,град^{-1}} \approx 36°C.$$

2-й случай. При 5°С объем цистерны будет V_2, а после нагревания до t_3 ее объем будет V_3, причем

$$\frac{V_2}{V_3} = \frac{1 + \beta_1 t_1}{1 + \beta_1 t_3},$$

где β_1 — коэффициент объемного расширения железа.

Откуда

$$V_3 = \frac{V_2(1 + \beta_1 t_3)}{1 + \beta_1 t_1}.$$

Такой же объем должен занимать керосин при температуре t_3. Мы уже знаем, что объем керосина при 5°С равен V_1, а после нагревания до t_3 его объем будет V_3, т. е.

$$\frac{V_1}{V_3} = \frac{1 + \beta t_1}{1 + \beta t_3}.$$

Подставив значение V_3 из предыдущего расчета в полученное соотношение, получим

$$\frac{V_1}{\dfrac{V_2(1 + \beta_1 t_3)}{1 + \beta_1 t_1}} = \frac{1 + \beta t_1}{1 + \beta t_3};\quad \frac{V_1(1 + \beta_1 t_1)}{V_2(1 + \beta_1 t_3)} = \frac{1 + \beta t_1}{1 + \beta t_3}.$$

Откуда

$$t_3 = \frac{V_1(1 + \beta_1 t_1) - V_2(1 + \beta t_1)}{V_2\beta_1(1 + \beta t_1) - V_1\beta(1 + \beta_1 t_1)}.$$

Подставим в это равенство численные значения и произведем вычисления

$$t_3 = 37{,}5°C.$$

105. Тело массой 1 *кг* скользит по наклонной плоскости длиной 20 *м*, которая образует с горизонтом угол 30°. Скорость тела у основания наклонной плоскости равна 4 *м/сек*. Вычислить количество тепла, выделенного при трении тела о плоскость, если начальная скорость тела равна нулю.

Дано:

$m = 1$ *кг*;
$l = 20$ *м*;
$\alpha = 30°$;
$v = 4$ *м/сек*;
$g = 9{,}8$ *м/сек*^{2}.

Q — ?

Решение

Разность между убылью потенциальной энергии тела и приращением его кинетической энергии есть работа на преодоление трения. Эта разность равна количеству тепла, выделившегося при скольжении тела по наклонной плоскости,

$$mgh - \frac{mv^2}{2} = Q,$$

но

$$h = l \sin \alpha.$$

Тогда

$$Q = mgl \sin \alpha - \frac{mv^2}{2}.$$

Подставив численные значения, получим

$$Q = 1\ кг \cdot 9{,}8\ м/сек^2 \cdot 10\ м - \frac{1\ кг \cdot 16\ м^2/сек^2}{2} = 90\ дж.$$

106. Какое количество теплоты надо израсходовать, чтобы медный стержень, имеющий площадь поперечного сечения 5 *см*^{2} при температуре 0°C, удлинился от нагревания на 0,1 *см*? Плотность меди, его удельная теплоемкость и коэффициент линейного расширения соответственно равны 8890 *кг/м*^{3}, 395 *дж/кг·град* и $1{,}7 \cdot 10^{-5}$*град*$^{-1}$.

Дано:

$S = 5\ см^2 = 5 \cdot 10^{-4} м^2$;
$l - l_0 = 0{,}1\ см = 10^{-3}\ м$;
$\rho = 8890\ кг/м^3$;
$c = 395\ дж/кг \cdot град$;
$\alpha = 1{,}7 \cdot 10^{-5}\ град^{-1}$.

Q — ?

Решение

Количество теплоты, идущее на нагревание стержня от 0 до t°C, выражается формулой

$$Q = cmt,$$

где m — масса стержня; c — его удельная теплоемкость.

Массу стержня легко выразить через плотность и объем

$$m = \rho V = \rho l_0 S.$$

Температура t может быть найдена из формулы линейного расширения

$$l = l_0 (1 + \alpha t),$$

откуда

$$t = \frac{l - l_0}{l_0 \alpha}.$$

Подставляя вместо t и m их значения в формулу для количества теплоты, получим

$$Q = c\rho S \frac{l - l_0}{\alpha},$$

$$Q = \frac{395\ дж/кг \cdot град \cdot 8890\ кг/м^3 \cdot 5 \cdot 10^{-4} м^2 \cdot 10^{-3} м}{1{,}7 \cdot 10^{-5} град^{-1}} \approx 1{,}03 \cdot 10^5\ дж = 103\ кдж.$$

107. В сосуд, содержащий 600 *г* воды при температуре 50°C, бросают кусок льда массой 200 *г* при —10°C. Определить конечную температуру воды в сосуде. Теплоемкостью сосуда пренебречь.

Дано:

$m_1 = 200\ г = 0{,}2\ кг$;
$m_2 = 600\ г = 0{,}6\ кг$;
$t_1 = -10°C$;
$t_2 = 50°C$;
$c_1 = 2100\ дж/кг \cdot град$;
$c_2 = 4190\ дж/кг \cdot град$;
$\lambda = 3{,}35 \cdot 10^5 дж/кг$.

Θ — ?

Решение

Составим уравнение теплового баланса

$$Q = Q_1 + Q_2 + Q_3,$$

где $Q = c_2 m_2 (t_2 - \Theta)$ — количество теплоты, отдаваемой водой при ее остывании от t_2 до общей температуры Θ.

Выражение $Q_1 = c_1 m_1 (t_0 - t_1)$ характеризует количество теплоты, необходимой для нагревания льда от t_1 до температуры его плавления t_0 (c_1 — удельная теплоемкость льда). Для плавления льда при температуре t_0 необходимо затратить количество теплоты $Q_2 = \lambda m_1$, где λ — удельная теплота плавления льда. Наконец, слагаемое $Q_3 = c_2 m_1 (\Theta - t_0)$ означает количество теплоты, пошедшей на подогревание воды, образовавшейся из растаявшего льда, от t_0 до общей температуры Θ (c_2 — удельная теплоемкость воды).

Таким образом,

$$c_2 m_2 (t_2 - \Theta) = c_1 m_1 (t_0 - t_1) + \lambda m_1 + c_2 m_1 (\Theta - t_0),$$

откуда

$$\Theta = \frac{c_2 m_2 t_2 - c_1 m_1 (t_0 - t_1) - \lambda m_1 + c_2 m_1 t_0}{c_2 (m_1 + m_2)},$$

$$\Theta = \frac{4190 \cdot 0{,}6 \cdot 50 - 2100 \cdot 0{,}2 \cdot 10 - 3{,}35 \cdot 10^5 \cdot 0{,}2}{4190 \cdot 0{,}8}\ \text{град} \approx 13°\text{C}.$$

108. Некоторая установка мощностью 30 *квт* охлаждается проточной водой, текущей по спиральной трубке, диаметр которой 15 *мм*. При установившемся режиме проточная вода нагревается на 15°C. Определить скорость воды, предполагая, что вся мощность установки идет на нагрев воды.

Дано:

$N = 30$ *квт* $= 30\,000$ *вт*;
$d = 15$ *мм* $= 1{,}5 \cdot 10^{-2}$ *м*;
$\Delta t = 15°$C;
$c = 4190$ *дж/кг · град*;
$\rho = 1000$ *кг/м*^{3}.

v — ?

Решение

Условие установившегося режима, когда вся выделяемая мощность идет на нагрев воды, охлаждающей установку, можно записать в виде следующего равенства

$$N = c\frac{m}{\tau} \cdot \Delta t,$$

где $\frac{m}{\tau}$ — масса воды, протекающей за 1 *сек*; c — удельная теплоемкость воды.

Но

$$\frac{m}{\tau} = \rho v S = \rho v \frac{\pi d^2}{4},$$

где ρ — плотность воды; v — скорость движения воды; S — площадь сечения трубки.

Подставляя $\frac{m}{\tau}$ в первое уравнение, получим

$$N = c\rho v \frac{\pi d^2}{4} \cdot \Delta t,$$

откуда

$$v = \frac{4N}{c\rho\pi d^2 \cdot \Delta t}.$$

После подстановки численных значений получим

$$v = \frac{4 \cdot 30\,000\ \text{вт}}{4190\ \text{дж/кг} \cdot \text{град} \cdot 1000\ \text{кг/м}^3 \cdot 3{,}14 \cdot 1{,}5^2 \cdot 10^{-4}\ \text{м}^2 \cdot 15\ \text{град}} \approx 2{,}70\ \text{м/сек}.$$

109. В тающую льдину попадает пуля, летящая со скоростью 10^3 *м/сек*. Масса пули 10 *г*. Считая, что 50% кинетической энергии превращается в теплоту и идет на плавление льда, найти, какое количество льда растаяло.

Дано:

$v = 10^3$ *м/сек*;
$m = 10$ *г* $= 0{,}01$ *кг*;
$\eta = 0{,}5$;
$\lambda = 3{,}35 \cdot 10^5$ *дж/кг*.

m_1 — ?

Решение

На основании закона сохранения и превращения энергии будет справедливо равенство

$$\eta E_к = Q,$$

где $E_к = \frac{mv^2}{2}$ — кинетическая энергия летящей пули; $\eta E_к$ — доля кинетической энергии, пошедшая на плавление льда; Q — количество теплоты, необходимое для плавления льда m_1:

$$Q = \lambda m_1,$$

где λ — удельная теплота плавления льда.

Подставим значения

$$\eta \frac{mv^2}{2} = \lambda m_1,$$

откуда

$$m_1 = \frac{\eta m v^2}{2\lambda},$$

$$m_1 = \frac{0{,}5 \cdot 0{,}01\ кг \cdot 10^6\ м^2/сек^2}{2 \cdot 3{,}35 \cdot 10^5 дж/кг} \approx 0{,}0075\ кг.$$

110. Железный шарик радиусом 1 *см*, нагретый до 120°C, положен на лед. На какую глубину погрузится шарик в лед, если удельная теплоемкость железа 0,11 *кал/г·град*, а плотность 7,8 *г/см*³? Температура окружающей среды 0°C.

Дано:

$r = 1\ см = 0{,}01\ м;$
$t = 120°C;$
$t_1 = 0°C;$
$\rho = 7{,}8\ г/см^3 = 7800\ кг/м^3;$
$c = 0{,}11\ кал/г \cdot град = 460{,}9\ дж/кг \cdot град;$
$\lambda = 80\ кал/г = 335{,}2 \cdot 10^3\ дж/кг.$

h — ?

Решение

Углубившись в лед на расстояние x, шарик радиуса r расплавит объем льда, состоящий из объема цилиндра $\pi r^2 x$ и объема полушара $\frac{2}{3}\pi r^3$, т. е. $\pi r^2 x + \frac{2}{3}\pi r^3$.

Количество теплоты, необходимое для плавления льда, равно

$$Q = \lambda \left(\pi r^2 x + \frac{2}{3}\pi r^3\right) \rho_1,$$

где λ — удельная теплота плавления льда; ρ_1 — плотность льда, равная $\approx 900\ кг/м^3$.

Количество теплоты, выделенное шаром,

$$Q = \frac{4}{3}\pi r^3 \rho c (t - t_1),$$

где c — удельная теплоемкость железа.

Приравнивая правые части предыдущих уравнений, получим

$$\lambda \left(\pi r^2 x + \frac{2}{3}\pi r^3\right) \rho_1 = \frac{4}{3}\pi r^3 \rho c (t - t_1).$$

После подстановки численных значений и сокращения найдем

$$x \approx 0{,}01\ м.$$

Глубина погружения шарика $h = 0{,}01 + 0{,}01 = 0{,}02\ м$ (высота цилиндра плюс радиус шарика).

111. В снеготаялке с к. п. д. 25% сожжено 2 *т* дров. Какую площадь можно освободить от снега при температуре —5°C при сжигании такого количества топлива, если толщина снежного покрова 50 *см*? Плотность снега 300 *кг/м*³, удельная теплоемкость снега $1{,}676 \cdot 10^3$ *дж/кг·град*, удельная теплота плавления снега $3{,}35 \cdot 10^5$ *дж/кг*, теплотворная способность (калорийность) дров $12{,}57 \cdot 10^6$ *дж/кг*.

Дано:

$\eta = 0{,}25;$
$m = 2т = 2000\ кг;$
$t_1 = 0°C;$
$t_2 = -5°C;$
$h = 50\ см = 0{,}5\ м;$
$\rho = 300\ кг/м^3;$
$c = 1{,}676 \cdot 10^3\ дж/кг \cdot град;$
$\lambda = 3{,}35 \cdot 10^5\ дж/кг;$
$q = 12{,}57 \cdot 10^6\ дж/кг.$

S — ?

Решение

Количество тепла, полученное при сгорании дров, идет на нагревание снега до 0°C и его плавление:

$$Q = \eta q m.$$

Масса растаявшего снега

$$m_1 = \rho V = \rho h S,$$

где h — толщина снежного покрова; S — площадь снежного покрова; ρ — плотность снега.

Тепло, пошедшее на нагревание и плавление снега,

$$Q_1 = c m_1 (t_1 - t_2) + \lambda m_1.$$

Составим уравнение теплового баланса

$$\eta m q = c m_1 (t_1 - t_2) + \lambda m_1.$$

Подставив вместо m_1 его значение, получим

$$\eta mq = \rho hS\,[c(t_1 - t_2) + \lambda],$$

откуда

$$S = \frac{\eta mq}{h\rho\,[c(t_1 - t_2) + \lambda]}.$$

После подстановки численных значений получим

$$S = \frac{2000 \cdot 12{,}57 \cdot 10^6 \cdot 0{,}25}{0{,}5 \cdot 300\,(1{,}676 \cdot 10^3 \cdot 5 + 3{,}35 \cdot 10^5)} = 122\ м^2.$$

112. В колбе находилась вода при температуре 0°C. Выкачав из колбы воздух, заморозили всю воду посредством ее испарения. Какая часть воды при этом испарилась, если притока тепла извне нет? Удельная теплота испарения воды при 0°C равна $24{,}9 \cdot 10^5$ *дж/кг*.

Дано:

$r = 595$ *кал/г* $= 24{,}9 \cdot 10^5$ *дж/кг*;
$\lambda = 80$ *кал/г* $= 3{,}35 \cdot 10^5$ *дж/кг*.

$\frac{m_2}{m}$ — ?

Решение

Необходимое для образования пара тепло может быть получено только за счет теплоты отвердевания (плавления), которая освобождается при замерзании воды.

При замерзании воды m_1 выделяется теплота λm_1 (λ — удельная теплота плавления льда). За счет этого тепла образуется количество пара m_2. Если теплота парообразования воды при 0°C равна r, то можно написать следующее равенство:

$$\lambda m_1 = r m_2.$$

Масса всей воды до откачивания $m = m_1 + m_2$. Из этих двух уравнений находим, что

$$\frac{m_2}{m_1 + m_2} = \frac{\lambda}{\lambda + r};\quad \frac{m_2}{m} = \frac{\lambda}{\lambda + r},$$

$$\frac{m_2}{m} = \frac{3{,}35 \cdot 10^5}{28{,}25 \cdot 10^5} = 0{,}119,$$

или 11,9% первоначальной массы воды.

113. Для работы двигателя расходуется 160 *кг* каменного угля в 1 *ч*. Охлаждение его осуществляется водой, температура которой при входе 12°C, а при выходе 27°C. Определить расход

воды за 1 *сек*, если на нагревание воды затрачивается 25% общего количества теплоты.

Дано:

$m = 160$ *кг*;
$t_1 = 12$°C;
$t_2 = 27$°C;
$t = 1$ *ч* $= 3600$ *сек*;
$q = 3 \cdot 10^7$ *дж/кг*;
$c = 4190$ *дж/кг·град*.

m_x — ?

Решение

Теплота, выделяемая при сгорании каменного угля в течение 1 *ч*, равна qm, где m — масса сгораемого угля, а q — удельная теплота сгорания угля. В результате охлаждения двигателя водой только 25% общего количества теплоты отнимается от него:

$$Q = \eta qm.$$

Эта теплота идет на нагревание воды:

$$Q = cm_1(t_2 - t_1).$$

Итак,

$$\eta qm = cm_1(t_2 - t_1),$$

откуда

$$m_1 = \frac{\eta qm}{c(t_2 - t_1)},$$

$$m_1 = \frac{0.25 \cdot 3 \cdot 10^7\ дж/кг \cdot 160\ кг}{4190\ дж/кг \cdot град \cdot 15\ град} = 19\,100\ кг.$$

Зная расход воды m_1 за время t, определим расход воды за 1 *сек*:

$$m_x = \frac{m_1}{t},\quad m_x = \frac{19100\ кг}{3600\ сек} \approx 5{,}3\ кг/сек.$$

114. Автомобиль прошел расстояние 120 *км* со скоростью 72 *км/ч*. На этом пути израсходовано 19 *кг* бензина. Какую среднюю мощность развивал мотор автомобиля во время пробега, если коэффициент полезного действия равен 25%?

Дано:

$s = 120$ *км* $= 1{,}2 \cdot 10^5$ *м*;
$v = 72$ *км/ч* $= 20$ *м/сек*;
$m = 19$ *кг*;
$\eta = 0{,}25$;
$q = 4{,}6 \cdot 10^7$ *дж/кг*.

N — ?

Решение

Количество теплоты, выделенной при сгорании бензина во время пробега, находим по формуле

$$Q = qm.$$

По условию задачи на передвижение автомобиля полезно затрачивается только часть этой теплоты, равная 0,25. Следовательно, использованная теплота

$$Q_1 = \eta qm.$$

Механическая работа, затраченная на передвижение автомобиля, будет равна $A = Q_1 = \eta qm$. С другой стороны, работу, затраченную на перемещение автомобиля, можно найти, перемножив мощность автомобиля на время его пробега:

$$A = Nt.$$

Следовательно,

$$Nt = \eta qm.$$

Для определения мощности мотора необходимо знать время пробега. Его можно определить из условия задачи, так как известны путь и средняя скорость:

$$t = \frac{s}{v}.$$

Подставляя это значение в уравнение, получим

$$N\frac{s}{v} = \eta qm.$$

Находим мощность мотора N:

$$N = \frac{\eta qmv}{s}.$$

Подставим в последнюю формулу данные из условия:

$$N = \frac{0{,}25 \cdot 4{,}6 \cdot 10^7\ дж/кг \cdot 19\ кг \cdot 20\ м/сек}{1{,}2 \cdot 10^5\ м} \approx 33 \cdot 10^3\ вт = 33\ квт\ (45\ л.\ с.).$$

Полученная величина мощности соответствует средней мощности автомобиля.

СВОЙСТВА ГАЗОВ И ПАРОВ

115. Определить давление газа в баллоне A, если разность уровней керосина в манометре равна 15 *см* (рис. 58). Атмосферное давление 750 *мм рт. ст.* Плотность ртути $13{,}6 \cdot 10^3$ *кг/м*^{3}, плотность керосина 800 *кг/м*^{3}.

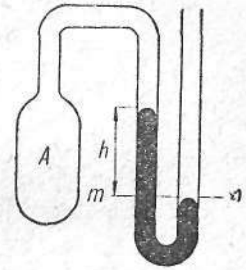


Рис. 58

Дано:

$H = 750$ *мм рт. ст.* $= 0{,}75$ *м рт. ст.*;
$h = 15$ *см* $= 0{,}15$ *м*;
$\rho = 13{,}6 \cdot 10^3$ *кг/м*^{3};
$\rho_1 = 800$ *кг/м*^{3}.

p — ?

Решение

Через уровень жидкости в правом колене манометра проведем горизонтальную плоскость mn. При установившемся равновесии давление в плоскости mn в правом и левом коленах манометра будет одинаково, при этом барометрическое давление $p_б$ в правом колене манометра будет уравновешиваться давлением газа p в сосуде A и давлением p_1 столба керосина высотой h, т. е.

$$p_б = p + p_1,$$

откуда

$$p = p_б - p_1.$$

Но $p_б = \rho gH$ и $p_1 = \rho_1 gh$, где g — ускорение силы тяжести.

Подставляя значения $p_б$ и p_1 в равенство для p, получим

$$p = p_б - p_1 = \rho gH - \rho_1 gh = (\rho H - \rho_1 h)\,g,$$
$$p = (13{,}6 \cdot 10^3\ кг/м^3 \cdot 0{,}75\ м - 800\ кг/м^3 \cdot 0{,}15\ м) \cdot 9{,}8\ м/сек^2 \approx \approx 9{,}88 \cdot 10^4\ н/м^2.$$

116. Два баллона соединены тонкой трубкой с краном. Объем первого баллона 3 *л*, второго — 8 *л*. В первом находится газ под давлением 75 *см рт. ст.*, а во втором — под давлением 30 *см рт. ст.* Какое давление будет в баллоне при открытом кране? Температура газа не изменяется.

Дано:

$V_1 = 3 л = 3 \cdot 10^{-3}$ *м*^{3};
$V_2 = 8 л = 8 \cdot 10^{-3}$ *м*^{3};
$p_1 = 75$ *см рт. ст.* $\approx 10 \cdot 10^4$ *н/м*^{2};
$p_2 = 30$ *см рт. ст.* $\approx 4 \cdot 10^4$ *н/м*^{2}.

p — ?

Решение

Давление газа при изотермическом процессе прямо пропорционально его плотности

$$\frac{p_1}{p_2} = \frac{\rho_1}{\rho_2} = \frac{m_1 V_2}{m_2 V_1}, \quad \frac{m_1}{m_2} = \frac{p_1 V_1}{p_2 V_2},$$

$$\frac{p_1}{p} = \frac{\rho_1}{\rho} = \frac{m_1 (V_1 + V_2)}{V_1 (m_1 + m_2)}, \quad \frac{p_1}{p} = \frac{\frac{m_1}{m_2}(V_1 + V_2)}{V_1\left(\frac{m_1}{m_2} + 1\right)}.$$

Подставляя значение $\frac{m_1}{m_2}$, получим

$$\frac{p_1}{p} = \frac{\frac{p_1 V_1}{p_2 V_2}(V_1 + V_2)}{V_1\left(\frac{p_1 V_1}{p_2 V_2} + 1\right)},$$

откуда

$$p = \frac{p_1 V_1 + p_2 V_2}{V_1 + V_2},$$

$$p = \frac{10 \cdot 10^4 \cdot 3 \cdot 10^{-3} + 4 \cdot 10^4 \cdot 8 \cdot 10^{-3}}{3 \cdot 10^{-3} + 8 \cdot 10^{-3}} \left[\frac{н/м^2 \cdot м^3}{м^3}\right] \approx 5{,}6 \cdot 10^4\ н/м^2.$$

117. Барометрическая трубка, наполненная ртутью, опущена в чашку со ртутью. В момент наполнения в трубку попало немного воздуха. При вертикальном положении трубки высота столбика ртути в ней равна h_1. Затем трубку наклонили таким образом, что высота столбика ртути стала h_2, при этом произошло сжатие воздуха в n раз. Определить величину атмосферного давления.

Решение

Когда барометрическая трубка занимала вертикальное положение, атмосферное давление уравновешивалось весом столбика ртути h_1 и давлением воздуха над ртутью в трубке p_1:

$$p = h_1 + p_1.$$

Когда трубку наклоняли, атмосферное давление уравновешивалось высотой столбика ртути h_2 и давлением p_2, которое равно np_1, так как воздух над трубкой сжался в n раз.

Тогда

$$p = h_2 + np_1,$$

откуда

$$h_1 + p_1 = h_2 + np_1$$

или

$$p_1 = \frac{h_1 - h_2}{n - 1}.$$

Подставляя данное значение в формулу $p = h_1 + p_1$, найдем

$$p = \frac{nh_1 - h_2}{n - 1}.$$

Эту задачу можно решить на основе закона Бойля — Мариотта. Решение задачи другим методом предоставляем читателям.

118. В трубке (рис. 59, *а*) находится ртуть. Высота столбика воздуха над ртутью в закрытом колене равна 20 *см*, давление — 76 *см рт. ст.* Пользуясь краном K, часть ртути выливают. На сколько понизится уровень ртути в закрытом колене, если в открытом он понизится на 60 *см*?

Дано:

$p = 76$ *см рт. ст.*;
$h_1 = 20$ *см* $= 0{,}2$ *м*;
$h_2 = 60$ *см* $= 0{,}6$ *м*.

h — ?

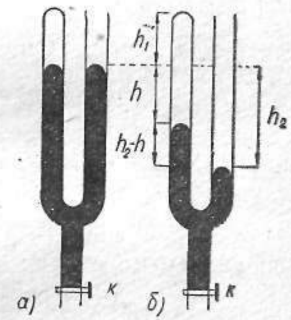


Рис. 59

Решение

На рис. 59, *б* показано, как установится ртуть после закрытия крана. Температура и масса воздуха в левом колене не меняются. Поэтому для воздуха, находящегося здесь, справедлив закон Бойля — Мариотта. Вначале давление было p, а объем — $h_1 S$, где S — площадь поперечного сечения трубки. Затем давление уменьшилось до величины p_1, а объем увеличился до $(h_1 + h_2) S$. Таким образом,

$$ph_1 S = p_1 (h_1 + h_2) S.$$

5 Зак. 1350

Давление на одном и том же уровне в жидкости всегда одинаково. Поэтому для уровня, отмеченного на чертеже пунктиром, можно записать

$$p_1 + \rho g (h_2 - h) = p.$$

Решая совместно полученные уравнения, найдем, что в левом колене ртуть опустилась на

$$h = h_2 \left[1 - \frac{p}{\rho g (h_1 + h_2)}\right],$$

$$h = 0{,}6\ м \left[1 - \frac{1{,}01 \cdot 10^5\ н/м^2}{13{,}6 \cdot 10^3\ кг/м^3 \cdot 9{,}8\ м/сек^2\ (0{,}2 м + 0{,}6\ м)}\right] = 0{,}03\ м.$$

119. Узкую цилиндрическую запаянную с одного конца трубку длиной 45 *см* погружают открытым концом в сосуд со ртутью на глубину 40 *см*. Внешнее давление 76 *см рт. ст.* Какова будет высота столбика ртути в трубке?

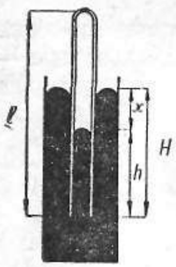


Рис. 60

Дано:

$l = 45\ см;$
$H = 40\ см;$
$p = 76\ см\ рт.\ ст.$

h — ?

Решение

Если первоначальное давление в трубке было p, то после погружения ее в сосуд со ртутью оно стало $p + x$. Учитывая обозначения, указанные на рис. 60, на основе закона Бойля—Мариотта можно записать

$$pl = (p + x)(l - H + x)$$

или после решения уравнения относительно x

$$x = -\frac{p + l - H}{2} + \sqrt{\left(\frac{p + l - H}{2}\right)^2 + pH}$$

(второй корень следует отбросить, так как при этом $x < 0$, что не имеет физического смысла).

После подстановки численных значений

$$x = -\frac{81}{2} + \frac{136{,}8}{2} \approx 28\ см.$$

Тогда

$$h = H - x,\ h = 40\ см - 28\ см = 12\ см.$$

120. В стеклянной метровой трубке, запаянной с обоих концов, находится столбик ртути высотой 20 *см*. При горизонтальном положении трубки столбик ртути находится посредине (рис. 61, *а*). Если трубку установить вертикально, то он смещается вниз на 10 *см* (рис. 61, *б*). Определить давление в трубке.

Дано:

$L = 1\ м;$
$l = 20\ см = 0{,}2\ м;$
$\Delta l = 10\ см = 0{,}1\ м.$

p_0 — ?

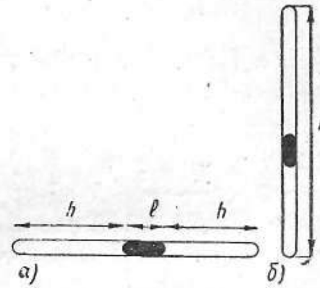


Рис. 61

Решение

В положении *а* объем воздуха в одной из половин трубки $V_0 = Sh$, где S — площадь поперечного сечения трубки.

В положении *б* объем воздуха в верхней части трубки $V_1 = S(h + \Delta l)$, давление p_1; в нижней части трубки объем $V_2 = S(h - \Delta l)$, давление $p_2 = p_1 + p_3$, где p_3 — давление столбика ртути.

На основании закона Бойля—Мариотта можем написать для верхней части трубки:

$$V_0 p_0 = V_1 p_1;\ Shp_0 = p_1 S (h + \Delta l)$$

или

$$hp_0 = (h + \Delta l)\, p_1.$$

Аналогичным образом для верхней части трубки

$$V_0 p_0 = V_2 p_2;\ Shp_0 = p_2 S (h - \Delta l)$$

или

$$hp_0 = (h - \Delta l)\, p_2.$$

Так как $p_2 = p_1 + p_3$, то

$$hp_0 = (h - \Delta l)(p_1 + p_3).$$

В полученное уравнение подставим вместо p_1 его значение:

$$p_1 = \frac{hp_0}{h + \Delta l}.$$

Тогда

$$hp_0 = (h - \Delta l)\left(\frac{hp_0}{h + \Delta l} + p_3\right).$$

После небольших преобразований найдем

$$p_0 = \frac{p_3 (h^2 - \Delta l^2)}{2h\Delta l}.$$

Учитывая, что $h = \frac{L - l}{2} = 40$ *см*, $p_3 = \rho g l = 200$ *мм рт. ст.*, подставим численные значения

$$p_0 \approx 5 \cdot 10^4 \text{ н/м}^2.$$

121. Во сколько взмахов можно откачать поршневым насосом объемом 100 *см*^{3} стеклянный баллон емкостью 1,5 *л* до давления 0,76 *мм рт. ст.*? Начальное давление в баллоне равно 1 *атм*.

Дано:

$\Delta V = 100$ *см*$^3 = 10^{-4}$ *м*^{3};
$V_0 = 1500$ *см*$^3 = 1{,}5 \cdot 10^{-3}$ *м*^{3};
$p_0 = 1$ *атм* $= 760$ *мм рт. ст.* $= 1{,}013 \cdot 10^5$ *н/м*^{2};
$p_n = 0{,}76$ *мм рт. ст.* $= 1{,}013 \cdot 10^2$ *н/м*^{2}.

n — ?

Решение

При первом взмахе поршень насоса, отодвигаясь, освобождает объем ΔV (рис. 62). В результате этого давление в откачиваемом сосуде, первоначально равное p_0, падает до значения p_1, определенного из условия

$$p_0 V_0 = p_1 (V_0 + \Delta V),$$

откуда

$$p_1 = p_0 \frac{V_0}{V_0 + \Delta V}.$$

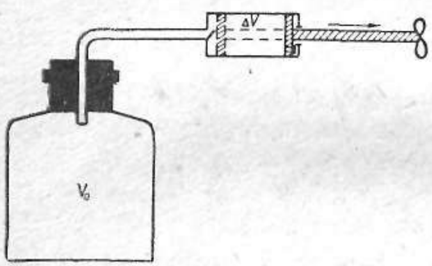


Рис. 62

После второго взмаха давление упадет до значения p_2, определяемого из условия

$$p_1 V_0 = p_2 (V_0 + \Delta V),$$

$$p_2 = p_1 \frac{V_0}{V_0 + \Delta V} = p_0 \left(\frac{V_0}{V_0 + \Delta V}\right)^2.$$

После третьего взмаха давление будет равно

$$p_3 = p_0 \left(\frac{V_0}{V_0 + \Delta V}\right)^3,$$

и после n взмахов

$$p_n = p_0 \left(\frac{V_0}{V_0 + \Delta V}\right)^n.$$

Логарифмируя последнее равенство и решая его относительно n, получаем

$$n = \frac{\lg \frac{p_n}{p_0}}{\lg \frac{V_0}{V_0 + \Delta V}}.$$

Подставляя данные из условия задачи, найдем

$$n = \frac{\lg \frac{1{,}013 \cdot 10^2}{1{,}013 \cdot 10^5}}{\lg \frac{1{,}5 \cdot 10^{-3}}{1{,}6 \cdot 10^{-3}}} = \frac{\lg 0{,}001}{\lg 1{,}5 - \lg 1{,}6} = \frac{-3}{0{,}176 - 0{,}204} = \frac{-3}{-0{,}028} =$$

$$= 107 \text{ взмахов.}$$

122. Упругий шар, наполненный газом и имеющий при давлении извне 1 *атм* радиус 10 *см*, помещен под колокол воздушного насоса. Чему равно давление под колоколом после откачки, если известно, что при этом радиус шара увеличится на 1 *см*, а давление, создаваемое оболочкой шара, равно ar^2, где $a = 1{,}66 \cdot 10^7$ единиц СИ и r — радиус шара?

Дано:

$r_1 = 10$ *см* $= 0{,}1$ *м*;
$r_2 = 11$ *см* $= 0{,}11$ *м*;
$p_0 = 760$ *мм рт. ст.* $= 1{,}013 \cdot 10^5$ *н/м*^{2};
$a = 1{,}66 \cdot 10^7$ ед. СИ.

p_x — ?

Решение

Давление на газ, находящийся внутри шара до откачки, равно

$$p_1 = p_1' + p_0,$$

где p_1' — давление, создаваемое оболочкой; p_0 — давление атмосферы.

Аналогично после откачки

$$p_2 = p_2' + p_x,$$

где p_2' — давление, создаваемое оболочкой после откачки; p_x — искомое давление под колоколом после откачки.

Согласно закону Бойля — Мариотта,

$$p_1V_1 = p_2V_2$$

или

$$(p'_1 + p_0)V_1 = (p'_2 + p_x)V_2,$$

откуда

$$p_x = \frac{p'_1V_1 + p_0V_1 - p'_2V_2}{V_2}.$$

По условию $p'_1 = ar_1^2$, $p'_2 = ar_2^2$. Подставляя значения давления p'_1 и p'_2, а также значения объемов V_1 и V_2 $\left(\text{объем шара } V = \frac{4}{3}\pi r^3\right)$ в равенство для p_x, находим

$$p_x = \frac{\frac{4}{3}\pi r_1^3 ar_1^2 + p_0\frac{4}{3}\pi r_1^3 - \frac{4}{3}\pi r_2^3 ar_2^2}{\frac{4}{3}\pi r_2^3}$$

или

$$p_x = \frac{ar_1^5 + p_0r_1^3 - ar_2^5}{r_2^3}.$$

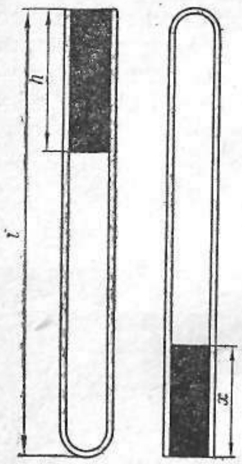


Рис. 63

Подставляя числовые значения из условия, получаем

$$p_x = \frac{1{,}66\cdot10^2 + 1{,}013\cdot10^2 - 2{,}67\cdot10^2}{1{,}33\cdot10^{-3}} \approx 225 \text{ н/м}^2.$$

123. В запаянной с одного конца стеклянной трубке длиной 90 *см* находится столбик воздуха, ограниченный сверху столбиком ртути высотой 30 *см*. Столбик ртути доходит до верхнего края трубки (рис. 63). Трубку осторожно переворачивают открытым концом вниз, причем часть ртути выливается. Какова высота столбика ртути, который останется в трубке, если атмосферное давление 75 *см рт. ст.*?

Дано:

$l = 90$ *см* $= 0{,}9$ *м*;
$h = 30$ *см* $= 0{,}3$ *м*;
$H = 75$ *см рт. ст.*

x — ?

Решение

Когда трубка расположена открытым концом вверх, объем части трубки V_1, занимаемой воздухом, и давление в трубке p_1 выразятся так:

$$V_1 = (l - h)S; \quad p_1 = H + h,$$

где S — площадь поперечного сечения трубки.

Когда трубка расположена открытым концом вниз, объем, занимаемый воздухом, V_2 и давление в трубке p_2 будут равны:

$$V_2 = (l - x)S; \quad p_2 = H - x.$$

По закону Бойля — Мариотта

$$p_1V_1 = p_2V_2$$

или

$$(l - h)S(H + h) = (l - x)S(H - x).$$

Отсюда

$$x^2 + (H + l)x + h(H + h - l) = 0,$$

$$x = \frac{H + l}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{(H + l)^2 - 4h(H + h - l)}$$

(второй корень следует отбросить, так как при этом $x > l$, что не имеет физического смысла).

Подставляя значения величин, получим

$$x = \frac{0{,}75 + 0{,}9}{2} -$$

$$-\frac{1}{2}\sqrt{(0{,}75 + 0{,}9)^2 - 4\cdot0{,}3\cdot(0{,}75 + 0{,}3 - 0{,}9)} =$$

$$= 0{,}03 \text{ м} = 3 \text{ см}.$$

124. В двух сосудах емкостью 3 и 5 *л* находятся азот под давлением 1 *атм* и окись углерода под давлением 5 *атм*. Сосуды соединяют тонкой трубкой, объемом которой можно пренебречь. Найти установившееся давление смеси, если начальная температура обоих газов равна температуре окружающей среды.

Дано:

$V_1 = 3$ *л* $= 3 \cdot 10^{-3}$ *м*^{3};
$V_2 = 5$ *л* $= 5 \cdot 10^{-3}$ *м*^{3};
$p_1 = 1$ *атм* $= 1{,}013 \cdot 10^5$ *н/м*^{2};
$p_2 = 5$ *атм* $= 5{,}065 \cdot 10^5$ *н/м*^{2}.

p — ?

Решение

Как бы ни протекал процесс смешения газов, в конце процесса установится температура, равная температуре окружающей среды, которая по условию равна начальной температуре.

Начальные давления газов достаточно малы, поэтому можно считать газ идеальным. Следовательно, после смешения каждый из газов будет занимать объем, равный сумме объемов сосудов; давление смеси будет равно сумме парциальных давлений каждого из газов. Вследствие равенства начальных и конечных температур можно найти парциальное давление каждого газа:

$$p'_1 = p_1 \frac{V_1}{V_1 + V_2};$$

$$p'_2 = p_2 \frac{V_2}{V_1 + V_2}.$$

Отсюда искомое давление смеси

$$p = \frac{p_1 V_1 + p_2 V_2}{V_1 + V_2},$$

$$p = \frac{1{,}013 \cdot 10^5 \text{ н/м}^2 \cdot 3 \cdot 10^{-3} \text{ м}^3 + 5{,}065 \cdot 10^5 \text{ н/м}^2 \cdot 5 \cdot 10^{-3} \text{ м}^3}{3 \cdot 10^{-3} \text{ м}^3 + 5 \cdot 10^{-3} \text{ м}^3} \approx$$

$$\approx 3{,}545 \cdot 10^5 \text{ н/м}^2.$$

125. В барометрической трубке, опущенной нижним концом в воду, находится 15,5 *см*^{3} водорода, смешанного с водяным паром. Вода в трубке поднялась на высоту, равную 20 *см* над поверхностью воды в сосуде. Атмосферное давление нормальное, температура 18° С. Сколько килограммов водорода находится в трубке?

Дано:

$V = 15{,}5$ *см*^{3} $= 15{,}5 \cdot 10^{-6}$ *м*^{3};
$t = 18°$ С;
$h = 20$ *см* $= 0{,}2$ *м*.

m — ?

Решение

Давление газа и насыщенного водяного пара в замкнутой части трубки составляет

$$p = h_0 - h = p_1 + p_2,$$

где p_1 — давление водорода; p_2 — давление насыщенного пара, h_0 — нормальное атмосферное давление. Из этого уравнения вытекает, что

$$p_1 = h_0 - h - p_2.$$

Плотность водорода при 18° С и давлении p_1 находим по уравнению

$$\rho = \rho_0 \frac{p_1}{h_0 (1 + \beta t)},$$

где ρ — плотность водорода, находящегося в трубке; ρ_0 — плотность водорода при нормальных условиях; β — коэффициент объемного расширения водорода.

Масса водорода, находящегося в трубке, равна

$$m = \rho V = \rho_0 \frac{p_1}{h_0 (1 + \beta t)} V.$$

Если вместо p_1 подставить его значение, то

$$m = \rho_0 \frac{h_0 - h - p_2}{h_0 (1 + \beta t)} V.$$

Плотность ρ_0 составляет 0,089 *кг/м*^{3}; $p_2 = 206{,}6$ *н/м*^{2}; $\beta = 0{,}0034$ *град*$^{-1}$.

После подстановки данных получим

$$m = 12{,}46 \cdot 10^{-7} \text{ кг}.$$

126. В закрытом цилиндрическом сосуде постоянного сечения находится газ при нормальных условиях. Сосуд расположен горизонтально и разделен подвижным поршнем в отношении 1 : 2. В каком отношении поршень будет делить сосуд, если его меньшую часть нагреть до 27° С, а большую охладить до — 123° С?

Дано:

$t_1 = 27°$ С;
$t_2 = -123°$ С;
$\beta = \frac{1}{273}$ *град*$^{-1}$.

$\frac{V_A}{V_B}$ — ?

Решение

Объем, который будет занимать газ после нагревания при постоянном давлении, определяется по закону Гей-Люссака (рис. 64):

для A

$$V_A = \frac{V_0}{3}(1 + \beta t_1);$$

для B

$$V_B = \frac{2}{3} V_0 (1 + \beta t_2),$$

где V_0 — объем всего сосуда.

Отношение объемов после изменения температур равно:

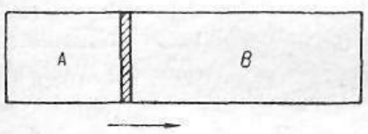


Рис. 64

$$\frac{V_A}{V_B} = \frac{\frac{V_0}{3}(1 + \beta t_1)}{\frac{2V_0}{3}(1 + \beta t_2)} = \frac{1 + \beta t_1}{2(1 + \beta t_2)},$$

$$\frac{V_A}{V_B} = \frac{1 + \frac{27}{273}}{2\left(1 - \frac{123}{273}\right)} = 1,$$

т. е. поршень будет делить цилиндр на две равные части.

127. Два равных по объему сосуда содержат: один — воздух при температуре T_1 и давлении p_1, другой — воздух при температуре T_2 и давлении p_2. Сосуды сообщаются между собой, их нагревают до температуры T. Какое установится давление воздуха внутри сосудов? Расширением сосудов при нагревании пренебречь.

Решение

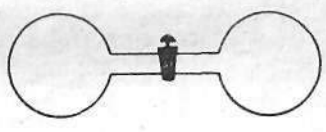


Рис. 65

Полагая, что в первом сосуде (рис. 65) содержится воздух при температуре t_1 и давлении p_1, а во втором сосуде воздуха нет, после соединения сосудов, согласно закону Бойля — Мариотта, получим

$$p_1 V = 2 p'_1 V,$$

откуда

$$p'_1 = \frac{p_1}{2},$$

где p'_1 — давление, установившееся в сосудах.

Проводя аналогичный расчет для второго сосуда, но предполагая, что воздуха в первом сосуде нет, получим

$$p'_2 = \frac{p_2}{2}.$$

После нагревания газа до температуры t, согласно закону Гей-Люссака, найдем:

для 1-го случая

$$\frac{\frac{p_1}{2}}{T_1} = \frac{p'}{T},$$

откуда

$$p' = \frac{p_1 T}{2T_1};$$

для 2-го случая

$$\frac{\frac{p_2}{2}}{T_2} = \frac{p''}{T},$$

откуда

$$p'' = \frac{p_2 T}{2T_2},$$

где p' и p'' — парциальные давления газов после нагревания.

Установившееся давление в сосудах после нагревания равно сумме парциальных давлений

$$p = p' + p'' = \frac{T}{2}\left(\frac{p_1}{T_1} + \frac{p_2}{T_2}\right).$$

128. Баллон содержит сжатый газ при 27° С и давлении 40 *атм*. Каково будет давление, если из баллона выпустить половину массы газа, а температуру понизить до 12° С?

Дано:

$T_1 = 273° + 27° = 300°$ K;
$T_2 = 273° + 12° = 285°$ K;
$p_1 = 40$ *атм* $= 4{,}052 \cdot 10^6$ *н/м*^{2}.

p_2 — ?

Решение

Будем считать, что переход из состояния с параметрами t_1, p_1 и m_1 (объем газа не меняется) в состояние с параметрами t_2, p_2

и m_2 осуществляется в два этапа: 1) при неизменной температуре t_1 из баллона выпускается половина массы газа и давление газа становится равным p'_2; 2) газ охлаждается от температуры t_1 до температуры t_2, а давление газа изменяется от значения p'_2 до значения p_2.

Так как на первом этапе $t_1 = \text{const}$, то

$$\frac{p_1}{p'_2} = \frac{\rho_1}{\rho_2},$$

где ρ_1 и ρ_2 — соответственно плотности газа в начале и в конце процесса. Так как $\rho_1 = \frac{m_1}{V}$ и $\rho_2 = \frac{m_2}{V}$ (V — объем сосуда), то

$$\frac{p_1}{p'_2} = \frac{m_1}{m_2}.$$

По условию задачи $m_2 = \frac{1}{2} m_1$. Поэтому

$$p'_2 = \frac{1}{2} p_1.$$

Так как на втором этапе $V = \text{const}$ и $m_2 = \text{const}$, то можно воспользоваться законом Шарля

$$\frac{p'_2}{p_2} = \frac{T_1}{T_2},$$

отсюда

$$p_2 = p'_2 \frac{T_2}{T_1} = \frac{1}{2} p_1 \frac{T_2}{T_1}.$$

После подстановки численных значений получим

$$p_2 = \frac{1}{2} \cdot 4{,}052 \cdot 10^6 \ н/м^2 \cdot \frac{285 \ град}{300 \ град} = 19{,}2 \cdot 10^5 \ н/м^2.$$

129. В закрытом сосуде A помещается манометрическая трубка с запаянным концом (рис. 66), в которой над ртутью находится воздух. Высота конца трубки над уровнем в сосуде A равна 60 *см*. При атмосферном давлении в сосуде A и температуре 10° С высота уровня ртути в трубке превышает уровень ртути в сосуде A на 10 *см*. Какова будет разность уровней ртути в трубке и в сосуде при температуре 293° С? (Изменением объема газа и уровня ртути в сосуде A, а также давлением паров ртути пренебречь.)

Дано:

$l_0 = 60$ *см*;
$T_1 = 273° + 10° = 283°$ К;
$h_1 = 10$ *см*;
$T_2 = 273° + 293° = 566°$ К.

h_2 — ?

Решение

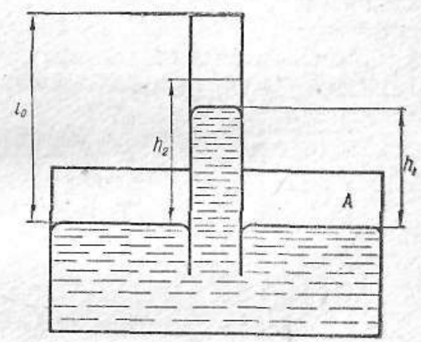


Рис. 66

При решении задачи исходим из уравнения состояния газа

$$\frac{p_1 V_1}{T_1} = \frac{p_2 V_2}{T_2}.$$

В этом уравнении объемы выразим через соответствующие длины столбика воздуха, т. е. V_1 через $l_0 - h_1$ и V_2 через $l_0 - h_2$, а давления — через давление воздуха в сосуде. Допустим, начальное давление воздуха в сосуде нормальное, а объем воздуха постоянный. Тогда конечное давление H_2 воздуха в сосуде определим из соотношения

$$H_2 = \frac{H_1 T_2}{T_1},$$

$$H_2 = \frac{76 \cdot 566}{283} = 152 \ см \ рт. \ ст.$$

Тогда давление воздуха, находящегося в запаянном конце трубки, будет равно:

$$p_1 = 76 - h_1 = 66 \ см \ рт. \ ст.;$$
$$p_2 = H_2 - h_2,$$

а уравнение состояния газа примет такой вид:

$$\frac{(l_0 - h_1)\, p_1}{T_1} = \frac{(l_0 - h_2)(H_2 - h_2)}{T_2}.$$

Подставляя численные значения, получаем

$$\frac{50 \cdot 66}{283} = \frac{(60 - h_2)(152 - h_2)}{566}.$$

Откуда

$$h_2^2 - 212 h_2 + 2520 = 0.$$

Решение этого уравнения дает только один корень, удовлетворяющий условию задачи

$$h_2 \approx 12{,}6\ см.$$

130. При нормальном атмосферном давлении в пустую барометрическую трубку, высота которой над уровнем ртути в сосуде 1,6 *м*, а площадь поперечного сечения 4 $см^2$, вводят 0,1 *г* жидкости. Вся жидкость превращается в пар, и ртуть в трубке опускается до 60 *см*. Определить отношение плотности паров жидкости к плотности воздуха, находящегося в тех же условиях, если температура 20° С. Плотность воздуха при нормальных условиях 1,3 $кг/м^3$. Давлением паров ртути в барометрической трубке пренебречь.

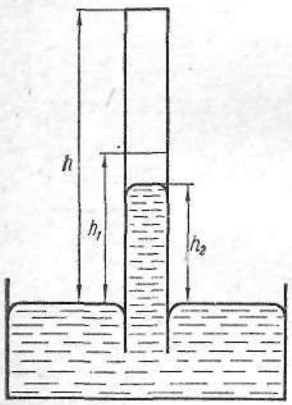


Рис. 67

Дано:

$h = 1{,}6\ м;$
$S = 4\ см^2 = 4 \cdot 10^{-4}\ м^2;$
$m_1 = 0{,}1\ г = 10^{-4}\ кг;$
$h_2 = 60\ см = 0{,}6\ м;$
$T_1 = 273° + 20° = 293°\,К;$
$T_0 = 273° + 0° = 273°\,К;$
$\rho_0 = 1{,}3\ кг/м^3.$

$\dfrac{\rho_п}{\rho_1}$ — ?

Решение

Определим плотность воздуха ρ_1 при условиях, одинаковых с паром жидкости (рис. 67), т. е. при t_1 и p_1.

Используя закон газового состояния

$$\frac{p_0V_0}{T_0} = \frac{p_1V_1}{T_1},$$

получим

$$\frac{p_0V_0}{p_1V_1} = \frac{T_0}{T_1}.$$

Учитывая, что $V_0 = \dfrac{m}{\rho_0}$, а $V_1 = \dfrac{m}{\rho_1}$, где m — масса газа, и подставляя эти значения в уравнение газового состояния, находим

$$\frac{\frac{m}{\rho_0}p_0}{\frac{m}{\rho_1}p_1} = \frac{T_0}{T_1}.$$

Откуда

$$\rho_1 = \frac{T_0p_1}{T_1p_0}\rho_0.$$

Так как давление в трубке после испарения жидкости $p_1 = h_1 - h_2$ ($h_1 = 0{,}76\ м$), то

$$\rho_1 = \frac{T_0(h_1 - h_2)}{T_1p_0}\rho_0.$$

Плотность пара жидкости в трубке

$$\rho_п = \frac{m_1}{(h - h_2)S},$$

где m_1 — масса испарившейся жидкости; $(h - h_2)S$ — объем, занимаемый паром.

Отношение плотности паров жидкости к плотности воздуха

$$\frac{\rho_п}{\rho_1} = \frac{\dfrac{m_1}{(h-h_2)S}}{\dfrac{T_0(h_1-h_2)}{T_1p_0}\rho_0} = \frac{m_1T_1p_0}{T_0S(h-h_2)(h_1-h_2)\rho_0},$$

$$\frac{\rho_п}{\rho_1} = \frac{10^{-4}\ кг \cdot 293\ град \cdot 0{,}76\ м}{273\ град \cdot 4 \cdot 10^{-4}\ м^2\,(1{,}6 - 0{,}6)\ м \cdot 0{,}16\ м \cdot 1{,}3\ кг/м^3} = 0{,}98.$$

131. Точка росы равняется 5° С. Сколько воды может испариться в каждом кубическом метре воздуха, если температура его 15° С?

Решение

Для определения количества воды, которое может испариться в 1 $м^3$ воздуха, надо знать массу водяного пара, уже имеющегося в воздухе, и массу водяного пара, который этот воздух мог бы насыщать при температуре 15° С.

Находим массу имеющегося в воздухе водяного пара при точке росы (см. прил. II, *17*). Она равняется $6{,}8 \cdot 10^{-3}\ кг/м^3$. Затем определяем массу насыщающего пара при температуре 15° С. Она составит $12{,}8 \cdot 10^{-3}\ кг/м^3$.

Следовательно, в каждом кубическом метре воздуха может испариться такое количество воды:

$$12{,}8 \cdot 10^{-3}\ кг/м^3 - 6{,}8 \cdot 10^{-3}\ кг/м^3 = 6 \cdot 10^{-3}\ кг/м^3.$$

132. Комната, в которой проходило собрание, имела в начале собрания температуру 16° С и точку росы 5° С, в конце собрания температура в комнате поднялась до 18° С, а точка росы до 8° С. Определить абсолютную и относительную влажность воздуха в комнате до и после собрания.

Решение

Определяем абсолютную влажность (см. прил. II, *17*). При температуре 5° С для насыщения 1 $м^3$ воздуха требуется водяного пара $\rho_1 = 6{,}8 \cdot 10^{-3}$ $кг/м^3$.

Относительную влажность найдем по формуле

$$f = \frac{\rho_1}{\rho_{01}} \cdot 100\%,$$

где ρ_{01} — количество водяных паров, которые насыщали бы пространство при данных условиях.

Для насыщения воздуха парами при 16° С требуется $13{,}6 \cdot 10^{-3}$ *кг* пара, т. е. $\rho_{01} = 13{,}6 \cdot 10^{-3}$ $кг/м^3$. Тогда

$$f_1 = \frac{6{,}8 \cdot 10^{-3}}{13{,}6 \cdot 10^{-3}} \cdot 100 = 50\%.$$

После собрания абсолютная влажность составляла $\rho_2 = 8{,}3 \times 10^{-3}$ $кг/м^3$, а относительная влажность

$$f_2 = \frac{\rho_2}{\rho_{02}} \cdot 100 = \frac{8{,}3}{15{,}4} \cdot 100 = 53{,}9\%,$$

т. е. относительная влажность возросла с 50 до 53,9%.

СВОЙСТВА ЖИДКОСТЕЙ

133. Радиусы каналов одного из колен U-образной трубки 0,5 *мм* и 2 *мм*. При заполнении трубки водой разность уровней в обоих коленах равна 2,25 *см*. Чему равен коэффициент поверхностного натяжения воды?

Дано:

$r_1 = 0{,}5$ $мм = 5 \cdot 10^{-4}$ $м$;
$r_2 = 2$ $мм = 2 \cdot 10^{-3}$ $м$;
$h = 2{,}25$ $см = 2{,}25 \cdot 10^{-2}$ $м$.

σ — ?

Решение

Чтобы жидкость находилась в равновесии, необходимо, чтобы в обоих коленах трубки было одинаковое давление:

$$p_1 + p_0 = p_2 + \rho g h + p_0,$$

где p_0 — величина атмосферного давления; p_1 — давление, обусловленное кривизной мениска жидкости в первом колене; p_2 — давление, обусловленное кривизной мениска жидкости во втором колене.

Так как $p_1 = \frac{2\sigma}{r_1}$ и $p_2 = \frac{2\sigma}{r_2}$, то

$$\frac{2\sigma}{r_1} = \frac{2\sigma}{r_2} + \rho g h,$$

где ρ — плотность воды; g — ускорение силы тяжести, откуда

$$\sigma = \frac{r_1 r_2 \rho g h}{2(r_2 - r_1)},$$

$$\sigma = \frac{5 \cdot 10^{-4}\ м \cdot 2 \cdot 10^{-3}\ м \cdot 1000\ кг/м^3 \cdot 9{,}8\ м/сек^2 \cdot 2{,}25 \cdot 10^{-2}\ м}{2 \cdot 1{,}5 \cdot 10^{-3}\ м} = 73{,}5 \cdot 10^{-3}\ н/м.$$

134. Капиллярная трубка с внутренним диаметром 0,4 *мм* наполнена водой. Часть воды повисла внизу в виде капельки, которую можно принять за часть сферы радиусом 2 *мм* (рис. 68). Определить высоту *h* столбика воды в трубке.

Дано:

$d = 0{,}4$ $мм = 4 \cdot 10^{-4}$ $м$;
$R = 2$ $мм = 2 \cdot 10^{-3}$ $м$;
$\sigma = 7{,}2 \cdot 10^{-2}$ $н/м$;
$\rho = 1000$ $кг/м^3$;
$g = 9{,}8$ $м/сек^2$.

h — ?

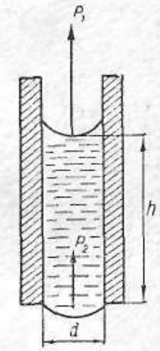


Рис. 68

Решение

Обозначим через p_1 и p_2 давления, обусловленные кривизной верхнего и нижнего менисков. Оба давления направлены вверх. Их сумма $p_1 + p_2$ уравновешивается гидростатическим давлением столба жидкости высотой h, т. е.

$$p_1 + p_2 = \rho g h.$$

Давления p_1 и p_2 находим по формуле

$$p = \frac{2\sigma}{R}.$$

В случае полного смачивания радиус верхнего мениска равен радиусу капилляра $r = \frac{d}{2}$. Таким образом:

$$p_1 = \frac{2\sigma}{r} = \frac{4\sigma}{d};\ p_2 = \frac{2\sigma}{R}.$$

Тогда равенство $p_1 + p_2 = \rho g h$ перепишется так:

$$\sigma\left(\frac{4}{d} + \frac{2}{R}\right) = \rho g h.$$

Откуда

$$h = \frac{\sigma}{\rho g}\left(\frac{4}{d} + \frac{2}{R}\right).$$

Подставив численные значения, получим

$$h = \frac{7{,}2\cdot 10^{-2}\ н/м}{9{,}8\ м/сек^2\cdot 1000\ кг/м^3}\left(\frac{4}{4\cdot 10^{-4}\ м} + \frac{2}{2\cdot 10^{-3}\ м}\right) = 8{,}1\cdot 10^{-2}\ м.$$

135. Определить силу, с которой притягиваются две плоскопараллельные стеклянные пластинки, опущенные нижними концами в воду, если расстояние между пластинками 0,2 *мм*, а длина и ширина каждой из них 10 *см*.

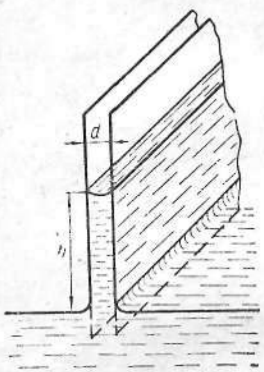


Рис. 69

Дано:

$d = 0{,}2\ мм = 2\cdot 10^{-4}\ м;$
$l = 10\ см = 0{,}1\ м;$
$\rho = 1000\ кг/м^3;$
$g = 9{,}8\ м/сек^2;$
$\sigma = 7{,}2\cdot 10^{-2}\ н/м.$

$F - ?$

Решение

Пусть вода при погружении пластинок поднимается на высоту h. Поверхность воды, заключенная между пластинками, является вогнутой цилиндрической поверхностью радиуса $r = \frac{d}{2}$ (рис. 69).

Вода между пластинками находится под уменьшенным давлением. Поэтому с внешней стороны на каждый квадратный сантиметр площади пластинки, находящейся в соприкосновении с водой, будет действовать сила, перпендикулярная к поверхности пластинки и равная уменьшению давления под вогнутой поверхностью воды.

Если уменьшение давления равно Δp, то сила притяжения между пластинками будет

$$F = \Delta p\cdot S,$$

где S — площадь соприкосновения каждой пластинки с водой.

Из последнего выражения видно, что для решения задачи необходимо найти Δp и S. Уменьшение давления под вогнутой цилиндрической поверхностью по формуле Лапласа будет равно

$$\Delta p = \frac{\sigma}{r},$$

где σ — коэффициент поверхностного натяжения воды; $r = \frac{d}{2}$ — радиус кривизны цилиндрической водной поверхности.

Для определения площади S необходимо знать высоту подъема воды между пластинками. Эту высоту найдем, приравняв уменьшение давления Δp весу столба воды высотой h и площадью сечения 1 $см^2$, так как уменьшение давления уравновешивается весом этого столба воды. Тогда получим

$$h = \frac{\Delta p}{\rho g},$$

где ρ — плотность воды, а g — ускорение силы тяжести.

Умножая это выражение на длину пластинки l, найдем

$$S = \frac{\Delta p\cdot l}{\rho g} = \frac{\sigma l}{\rho g r}.$$

Подставляя в выражение силы значение Δp и S, получим

$$F = \frac{\sigma^2 l}{\rho g r^2}.$$

Подставив численные значения, найдем

$$F = \frac{7{,}2^2\cdot 10^{-4}\ н^2/м^2\cdot 0{,}1\ м}{1000\ кг/м^3\cdot 9{,}8\ м/сек^2\cdot 10^{-8}\ м^2} = 5{,}28\ н.$$

136. Капля ртути массой 1,36 *г* введена между параллельными стеклянными пластинками. Какую силу следует приложить для того, чтобы расплющить каплю до толщины 0,1 *мм*? Коэффициент поверхностного натяжения ртути 500 *дн/см*. Считать, что ртуть абсолютно не смачивает стекло.

Дано:

$m = 1{,}36\ г = 1{,}36\cdot 10^{-3}\ кг;$
$d = 0{,}1\ мм = 10^{-4}\ м;$
$\sigma = 500\ дн/см = 0{,}5\ н/м;$
$\rho = 13{,}6\ г/см^3 = 13\,600\ кг/м^3.$

$F - ?$

Решение

Сдавленная капля ртути примет вид очень тонкого диска с выпуклой боковой поверхностью, имеющей двоякую кривизну. Дополнительное давление Δp, возникающее вследствие кривизны поверхности, уравновешивается внешним давлением, производимым силой F:

$$\Delta p = \frac{F}{S},$$

где S — площадь соприкосновения капли ртути с пластинкой.

Давление Δp выражается формулой

$$\Delta p = \sigma\left(\frac{1}{R} + \frac{1}{r}\right),$$

где R — радиус диска и $r = \frac{d}{2}$.

Площадь равна

$$S = \frac{V}{d} = \frac{m}{\rho d},$$

где V — объем капли ртути; m — ее масса и ρ — плотность.

С другой стороны, $S = \pi R^2$. Поэтому

$$R = \sqrt{\frac{m}{\pi\rho d}}.$$

Подставляя значения Δp и S в формулу $F = \Delta p \cdot S$, получим

$$F = \frac{m\sigma}{\rho d}\left(\sqrt{\frac{\pi\rho d}{m}} + \frac{2}{d}\right),$$

$$F = \frac{1{,}36\cdot10^{-3}\ кг\cdot0{,}5\ н/м}{13\,600\ кг/м^3\cdot10^{-4}\ м}\left(\sqrt{\frac{3{,}14\cdot13\,600\ кг/м^3\cdot10^{-4}\ м}{1{,}36\cdot10^{-3}\ кг}} + \frac{2}{10^{-4}\ м}\right) = 10{,}3\ н.$$

137. На сколько градусов нагреется капля ртути, полученная от слияния двух капель диаметром 1 *мм* каждая?

Дано:

$r = 0{,}5\ мм = 5\cdot10^{-4}\ м;$
$\sigma = 500\ дн/см = 0{,}5\ н/м;$
$c = 138\ дж/кг\cdot град;$
$\rho = 13{,}6\ г/см^3 = 13\,600\ кг/м^3.$

Δt — ?

Решение

Чтобы увеличить поверхность жидкости на некоторое значение, необходимо совершить работу (рис. 70)

$$A = Fh = \sigma hl = \sigma\Delta S.$$

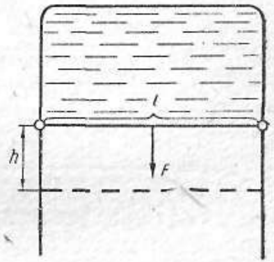


Рис. 70

В нашем случае при слиянии двух капель ртути происходит уменьшение поверхности и выделение энергии поверхностного слоя в виде тепла

$$\Delta E = \sigma\Delta S,$$

где σ — коэффициент поверхностного натяжения ртути; ΔS — изменение площади поверхности:

$$\Delta S = 2\cdot4\pi r^2 - 4\pi R^2,$$

где r — радиус малых капель; R — радиус большой капли. Радиус R находим, приравнивая объем большой капли к сумме объемов слившихся капель

$$\frac{4}{3}\pi R^3 = 2\cdot\frac{4}{3}\pi r^3,$$

откуда

$$R = r\sqrt[3]{2}.$$

Тогда

$$\Delta S = 2\cdot4\pi r^2 - 4\pi r^2\sqrt[3]{4} = 4\pi r^2(2 - \sqrt[3]{4}).$$

Уменьшение поверхности ртути на ΔS соответствует выделению энергии

$$\Delta E = \sigma\Delta S = \sigma\cdot4\pi r^2(2 - \sqrt[3]{4}).$$

Выделенная энергия пойдет на нагревание ртутной капли, следовательно,

$$\Delta E = \Delta Q = cm\Delta t,$$

где c — удельная теплоемкость ртути; m — масса ртути; Δt — изменение температуры.

Приравнивая выражения для ΔE и ΔQ, получим

$$cm\Delta t = \sigma\cdot4\pi r^2(2 - \sqrt[3]{4}).$$

Масса ртути

$$m = 2\cdot\frac{4}{3}\pi r^3\rho,$$

где ρ — плотность ртути.

Тогда

$$c\frac{8}{3}\pi r^3\rho\Delta t = 4\pi r^2\sigma(2-\sqrt[3]{4}),$$

откуда

$$\Delta t = \frac{3\sigma(2-\sqrt[3]{4})}{2c\rho r}.$$

Для ртути $\sigma = 500$ *дн/см* $= 0{,}5$ *н/м*, $c = 0{,}033$ *кал/г·град* $=$ $= 138$ *дж/кг·град*, $\rho = 13\,600$ *кг/м*^{3}.

Подставляя численные значения, получим

$$\Delta t = \frac{3\cdot 0{,}5\ н/м\cdot(2-\sqrt[3]{4})}{2\cdot 138\ дж/кг\cdot град\cdot 13\,600\ кг/м^3\cdot 0{,}5\cdot 10^{-3}\ м} = 3{,}301\cdot 10^{-4}\ град.$$

138. Барометрическая трубка, заполненная ртутью, погружена открытым концом в сосуд с ртутью. Диаметр внутреннего сечения трубки 2 *мм*. Разность уровней ртути в трубке и сосуде равна 760 *мм*. Чему равно атмосферное давление?

Дано:

$h = 760$ *мм* $= 0{,}76$ *м*;
$d = 2$ *мм* $= 2\cdot 10^{-3}$ *м*;
$\sigma = 0{,}5$ *н/м*;
$\rho = 13\,600$ *кг/м*^{3}.

p — ?

Решение

Атмосферное давление p складывается из давления p_1, создаваемого столбом ртути высотой h, и давления p_2 выпуклого мениска ртути в трубке, т. е.

$$p = p_1 + p_2.$$

Давление $p_1 = \rho gh$, где ρ — плотность ртути; g — ускорение силы тяжести; h — разность уровней ртути в трубке и в сосуде. Давление $p_2 = \frac{2\sigma}{R}$, где σ — коэффициент поверхностного натяжения; R — радиус кривизны поверхности мениска, в первом приближении равный радиусу трубки.

Подставим значения p_1 и p_2 в формулу для p:

$$p = \rho gh + \frac{4\sigma}{d},$$

$$p = 13\,600\ кг/м^3\cdot 9{,}8\ м/сек^2\cdot 0{,}76\ м + \frac{4\cdot 0{,}5\ н/м}{2\cdot 10^{-3}\ м} = 1{,}02\cdot 10^5\ н/м^2.$$

ГЛАВА III

ЭЛЕКТРИЧЕСТВО

ЭЛЕКТРОСТАТИКА

139. Два маленьких шарика висят на длинных шелковых нитях, закрепленных в одной точке. Когда шарикам сообщили одинаковые по величине и знаку электрические заряды, нити разошлись на определенный угол α. Определить плотность шариков, если угол расхождения не изменился после погружения их в керосин. Плотность керосина составляет 0,8 *г/см*^{3} и диэлектрическая проницаемость равна 2.

Дано:

$\rho_к = 0{,}8$ *г/см*^{3} $= 800$ *кг/м*^{3};
$\varepsilon = 2$.

ρ — ?

Решение

На рис. 71, *а* заряженные шарики A и B изображены в положении равновесия в воздухе. Рассмотрим условие равновесия шарика B. На него действуют сила тяжести P, сила кулоновского отталкивания F и сила реакции нити N. Равновесие наступит при таком положении шарика, когда равнодействующая всех трех сил будет равна нулю, т. е. равнодействующая R сил P и F окажется направленной вдоль нити OB и будет уравновешиваться силой реакции нити N. Рассмотрим условие равновесия шарика B, когда заряженные шарики находятся в керосине (рис. 71, *б*). На шарик действуют сила тяжести P, выталкивающая сила Q, сила кулоновского отталкивания F_1 и сила реакции нити N_1. Так как вес тела P

и выталкивающая сила Q направлены вдоль одной прямой в противоположные стороны, то эти две силы можно заменить их равнодействующей $P_1 = P - Q$.

Из подобия четырехугольников $BFRP$ и $BF_1R_1P_1$ следует

$$\frac{P_1}{F_1} = \frac{P}{F},$$

где $P_1 = P - Q$ и $F_1 = \frac{F}{\varepsilon}$.

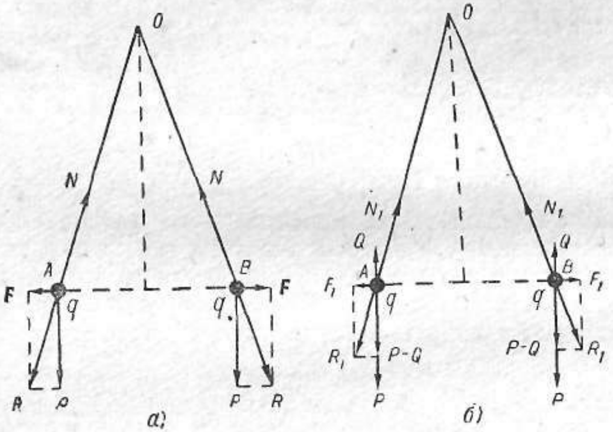


Рис. 71

Тогда

$$\frac{(P - Q)\,\varepsilon}{F} = \frac{P}{F}$$

или

$$1 - \frac{Q}{P} = \frac{1}{\varepsilon},$$

но

$$\frac{Q}{P} = \frac{V\rho_к g}{V\rho g},$$

где V — объем шарика; ρ и $\rho_к$ — соответственно плотности шарика и керосина.

Тогда

$$1 - \frac{\rho_к}{\rho} = \frac{1}{\varepsilon}.$$

Отсюда величина плотности шарика будет равна

$$\rho = \frac{\varepsilon}{\varepsilon - 1}\,\rho_к = 1600\ кг/м^3.$$

140. Шар, диаметр которого равен 1 *см* и заряд 10^{-6} *к*, помещен в масло плотностью 0,8 *г/см*³. Плотность материала шара 1,5 *г/см*³. В какое электрическое поле, направленное вертикально вверх, надо поместить шар, чтобы он плавал в масле?

Дано:

$r = 0{,}5\ см = 0{,}005\ м;$
$q = 10^{-6}\ к;$
$\rho_1 = 0{,}8\ г/см^3 = 800\ кг/м^3;$
$\rho_2 = 1{,}5\ г/см^3 = 1500\ кг/м^3;$
$g = 9{,}8\ м/сек^2.$

E — ?

Решение

Шар будет плавать в масле при условии, что $P = P_1 + F$, где P — вес шара; P_1 — выталкивающая сила масла; F — электростатическая сила взаимодействия заряженного шара с электрическим полем. Легко видеть, что

$$P = \frac{4}{3}\pi r^3 \rho_2 g;$$

$$P_1 = \frac{4}{3}\pi r^3 \rho_1 g.$$

Отсюда

$$F = P - P_1.$$

Подставляя вместо F его значение и решая относительно напряженности поля, получим

$$E = \frac{P - P_1}{q} = \frac{4\pi r^3 g}{3q}(\rho_2 - \rho_1).$$

После подстановки численных значений найдем

$$E = \frac{4 \cdot 3{,}14\,(0{,}005)^3 \cdot 9{,}8}{3 \cdot 10^{-6}}\,(1500 - 800) \approx 3600\ в/м.$$

141. Маятник с периодом колебаний 1 *сек* представляет собой шарик массой 16 *г*, подвешенный на нити, не проводящей электричество. Шарик электризуют отрицательным зарядом и помещают в электрическое поле, направленное вверх. Период колебания маятника $T_1 = 0{,}8$ *сек*. Вычислить напряженность электрического поля, если заряд на шарике равен 0,0088 *к*.

Дано:

$T = 1$ *сек*;
$m = 16$ *г* $= 0{,}016$ *кг*;
$T_1 = 0{,}8$ *сек*;
$q = 0{,}0088$ *к*.
E — ?

Решение

Из формулы периода колебаний маятника $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$ найдем ускорение

$$g = \frac{4\pi^2 l}{T^2}.$$

При помещении шара в электрическое поле период колебаний и ускорение изменились:

$$T_1 = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g_1}}; \quad g_1 = \frac{4\pi^2 l}{T_1^2}.$$

Из полученных значений g и g_1 находим:

$$g_1 = g\,\frac{T^2}{T_1^2}; \quad \Delta g = g_1 - g = g\left(\frac{T^2}{T_1^2} - 1\right).$$

Сила электрического действия поля на шар равна

$$F = m\cdot\Delta g = mg\left(\frac{T^2}{T_1^2} - 1\right).$$

С другой стороны, эта сила равна

$$F = qE.$$

Откуда

$$E = \frac{F}{q} = \frac{mg}{q}\left(\frac{T^2}{T_1^2} - 1\right) = \frac{0{,}016\ \textit{кг}\cdot 9{,}8\ \textit{м/сек}^2}{0{,}0088\ \textit{к}}\left(\frac{1}{0{,}64} - 1\right) = 100\ \textit{в/м}.$$

142. На капельках ртути радиусом 0,1 *см* находятся одинаковые заряды $6{,}66\cdot 10^{-14}$ *к*. Десять таких капелек сливаются в одну большую. Каков будет потенциал этой капли?

Дано:

$n = 10$;
$r = 0{,}1$ *см*;
$q = 6{,}66\cdot 10^{-14}$ *к* $= 19{,}98\cdot 10^{-5}$ CGSE.
U — ?

Решение

Обозначим радиус большой капли через r_1. Если сливается n капель, то заряд Q большой капли будет равен nq, и, следовательно, для ее потенциала, принимая во внимание, что $C = r_1$, можно написать

$$U = \frac{Q}{C} = \frac{nq}{r_1}.$$

Радиус большой капли легко определить, исходя из того, что объем V капли ($V = \frac{4}{3}\pi r_1^3$) равен n объемов маленькой капли:

$$V = nV_0 = n\,\frac{4}{3}\,\pi r^3.$$

Сравнивая правые части этих равенств, находим

$$r_1 = r\sqrt[3]{n}.$$

Таким образом,

$$U = \frac{q}{r}\sqrt[3]{n^2} = 927{,}5\cdot 10^{-5}\,\text{CGSE}\ (2{,}78\ \textit{в}).$$

143. Плоский конденсатор, у которого расстояние между пластинами равно 4 *мм*, погружается до половины в керосин (рис. 72,*а*). Диэлектрическая проницаемость керосина — 2. На сколько нужно раздвинуть пластины конденсатора, чтобы его емкость осталась неизменной?

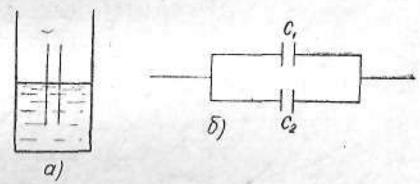


Рис. 72

Дано:

$d = 4$ *мм*;
$\varepsilon_к = 2$;
$\varepsilon_в = 1$.
Δd — ?

Решение

Емкость параллельно соединенных конденсаторов равна сумме их емкостей (рис. 72, *б*). До погружения в керосин емкость конденсатора была равной

$$C = \frac{\varepsilon_в \varepsilon_0 S}{d},$$

где $\varepsilon_0 = \frac{1}{4\pi \cdot 9 \cdot 10^9}$ *ф/м* — постоянный коэффициент, называемый диэлектрической проницаемостью вакуума; $\varepsilon_в$ — диэлектрическая проницаемость воздуха, равная единице.

После погружения конденсатора до половины в керосин и раздвижения пластин до некоторой величины d_1 образовались два параллельно соединенных конденсатора с площадью пластин $\frac{S}{2}$ у каждого. Вычислим емкость образовавшегося сложного конденсатора, пользуясь формулой для двух конденсаторов, соединенных параллельно, и приравняем ее к первоначальной емкости конденсатора:

$$C = C_1 + C_2 = \frac{\varepsilon_в \varepsilon_0 S}{2d_1} + \frac{\varepsilon_к \varepsilon_0 S}{2d_1}.$$

Подставим вместо C его значение

$$\frac{\varepsilon_в \varepsilon_0 S}{d} = \frac{\varepsilon_в \varepsilon_0 S}{2d_1} + \frac{\varepsilon_к \varepsilon_0 S}{2d_1},$$

откуда

$$d_1 = \frac{3}{2} d = 6 \text{ мм};$$

$$\Delta d = d_1 - d = 2 \text{ мм}.$$

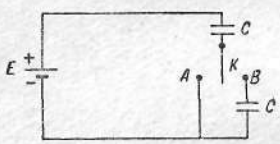


Рис. 73

144. Два одинаковых конденсатора емкостью C включены в схему, содержащую источник с э. д. с. E и ключ K. Подвижный контакт ключа совершает медленные колебания, соединяя пластинку верхнего конденсатора попеременно то с клеммой A, то с клеммой B (рис. 73). Определить, как меняется напряжение на нижнем конденсаторе при каждом переключении, если первоначально контакт находился в положении A; если первоначально контакт находился в положении B. Конденсаторы считать идеальными (утечкой и краевыми эффектами пренебречь).

Решение

При первоначальном положении контакта в клемме A верхний конденсатор заряжен до напряжения E и разность потенциалов между K и нижней пластинкой нижнего конденсатора равна нулю. Эта разность потенциалов не изменится при переключении контакта в B. Понятно, что и при последующих переключениях напряжение на нижнем конденсаторе будет равно нулю.

При первоначальном положении контакта в B оба конденсатора заряжены до напряжения $\frac{E}{2}$ и заряд каждого из них составляет $\frac{CE}{2}$. Переключение контакта в A приводит к повышению напряжения на верхнем конденсаторе до величины E, а его заряд становится равным CE. При новом соприкосновении контакта с клеммой B на нижнем конденсаторе возникнет заряд q_1, а на верхнем — q_2. Согласно закону сохранения заряда,

$$q_1 - q_2 = \frac{CE}{2} - CE.$$

Общее напряжение на системе конденсаторов будет равно E:

$$E = \frac{q_1}{C} + \frac{q_2}{C}.$$

Из двух последних равенств имеем

$$q_1 = \frac{CE}{4} \text{ и } q_2 = \frac{3CE}{4}.$$

Следовательно, на нижнем конденсаторе будет напряжение $\frac{E}{4}$, а на верхнем — $\frac{3E}{4}$.

Аналогично можно найти, что при третьем касании клеммы B напряжение на нижнем конденсаторе будет $\frac{E}{8}$, при четвертом — $\frac{E}{16}$, при n-м — $\frac{E}{2^n}$. В конце концов нижний конденсатор разрядится, а верхний зарядится до напряжения E.

145. Определить, как распределится напряжение 120 *в* между тремя последовательно соединенными конденсаторами, имеющими емкости 0,3 *мкф*, 0,2 *мкф* и 0,12 *мкф*, а также определить общую емкость и заряд всей батареи.

Дано:

$U = 120$ *в*;
$C_1 = 0{,}3$ *мкф* $= 0{,}3 \cdot 10^{-6}$ *ф*;
$C_2 = 0{,}2$ *мкф* $= 0{,}2 \cdot 10^{-6}$ *ф*;
$C_3 = 0{,}12$ *мкф* $= 0{,}12 \cdot 10^{-6}$ *ф*.

q — ? U_1 — ? U_2 — ?
U_3 — ? C — ?

Решение

Определяем общую емкость всех трех конденсаторов:

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3},$$

$$\frac{1}{C} = \frac{10^6}{0{,}3} + \frac{10^6}{0{,}2} + \frac{10^6}{0{,}12} = \frac{10^8}{6};\ C = 6 \cdot 10^{-8} ф.$$

Определим заряд всей батареи:

$$q = CU = 6 \cdot 10^{-8}\ ф \cdot 120\ в = 7{,}2 \cdot 10^{-6}\ к.$$

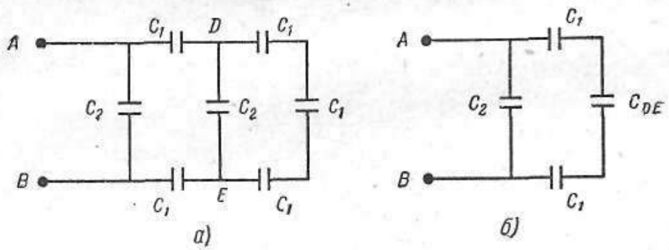


Рис. 74

Напряжение на отдельных конденсаторах:

$$U_1 = \frac{q}{C_1} = \frac{7{,}2 \cdot 10^{-6}\ к}{0{,}3 \cdot 10^{-6}\ ф} = 24\ в;$$

$$U_2 = \frac{q}{C_2} = \frac{7{,}2 \cdot 10^{-6}\ к}{0{,}2 \cdot 10^{-6}\ ф} = 36\ в;$$

$$U_3 = \frac{q}{C_3} = \frac{7{,}2 \cdot 10^{-6}\ к}{0{,}12 \cdot 10^{-6}\ ф} = 60\ в.$$

146. В схеме, изображенной на рис. 74, *а*, электрические емкости $C_1 = 2 \cdot 10^{-6}$ *ф* и $C_2 = 1 \cdot 10^{-6}$ *ф*. Вычислить общую емкость системы, включенной между клеммами A и B.

Решение

Участок DE состоит из двух соединенных параллельно ветвей, в одной из которых включены последовательно три одинаковые емкости C_1, а в другой — емкость C_2. По формуле соединения емкостей емкость C_{DE} этого участка цепи равна сумме емкостей обеих ветвей

$$C_{DE} = C'_1 + C_2,$$

где C'_1 — емкость первой ветви, которую легко определить следующим уравнением:

$$\frac{1}{C'_1} = \frac{3}{C_1},\ \text{т. е.}\ C'_1 = \frac{C_1}{3},$$

и

$$C_{DE} = C_2 + \frac{C_1}{3} = \frac{3C_2 + C_1}{3}.$$

Заменим участок DE одной эквивалентной емкостью C_{DE} (рис. 74, *б*). Тогда искомая емкость C_{AB} будет равна сумме емкостей двух параллельных ветвей, одна из которых содержит емкости C_1, C_{DE} и C_1, соединенные последовательно, а другая — емкость C_2.

Обозначим общую емкость первой ветви через C_3. Тогда

$$C_{AB} = C_3 + C_2,$$

причем

$$\frac{1}{C_3} = \frac{2}{C_1} + \frac{1}{C_{DE}}.$$

Заменив емкость C_{DE} ее значением, получим

$$\frac{1}{C_3} = \frac{2}{C_1} + \frac{3}{3C_2 + C_1} = \frac{6C_2 + 5C_1}{3C_2C_1 + C_1^2},$$

$$C_3 = \frac{3C_2C_1 + C_1^2}{6C_2 + 5C_1}$$

и

$$C_{AB} = C_2 + \frac{3C_2C_1 + C_1^2}{6C_2 + 5C_1} = \frac{6C_2^2 + 8C_2C_1 + C_1^2}{6C_2 + 5C_1}.$$

Подставив численные значения, найдем

$$C_{AB} = \frac{(6 + 8 \cdot 2 + 4) \cdot 10^{-12}}{(6 + 5 \cdot 2) \cdot 10^{-6}} = 1{,}62 \cdot 10^{-6}\ ф.$$

147. Обкладки плоского конденсатора изолированы друг от друга пластиной из диэлектрика. Конденсатор заряжен до разности потенциалов 1000 *в*. Какова относительная диэлектрическая проницаемость материала пластины, если при ее удалении разность потенциалов между обкладками конденсатора возрастает до 3000 *в*?

Дано:

$U_1 = 1000$ *в*;
$U_2 = 3000$ *в*;
$\varepsilon_2 = 1.$

ε_1 — ?

Решение

Разность потенциалов между обкладками конденсатора равна

$$U = \frac{q}{C},$$

где q — заряд на пластинах конденсатора; C — емкость конденсатора.

Обозначим через U_1 и C_1 соответственно разность потенциалов и емкость конденсатора с пластиной из диэлектрика, а через U_2 и C_2 — те же величины после удаления пластины. Заряд конденсатора в обоих случаях одинаков. Поэтому

$$U_1C_1 = U_2C_2$$

или

$$\frac{C_1}{C_2} = \frac{U_2}{U_1}.$$

Из формулы для емкости плоского конденсатора следует, что

$$\frac{C_1}{C_2} = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2},$$

где ε_1 и ε_2 — относительные диэлектрические проницаемости материала пластины и воздуха.

Таким образом,

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_2 \frac{U_2}{U_1}.$$

После подстановки численных значений получим

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_2 \frac{U_2}{U_1} = \frac{3000}{1000} = 3.$$

148. В плоский конденсатор длиной 5 *см* влетает электрон под углом 15° к пластинам. Электрон обладает энергией $1{,}6 \cdot 10^{-16}$ *дж*. Расстояние между пластинами конденсатора 1 *см*. Определить величину напряжения на пластинах конденсатора, при котором электрон при выходе из пластин будет двигаться параллельно им. Заряд электрона $1{,}6 \cdot 10^{-19}$ *к*, его масса $9{,}11 \cdot 10^{-31}$ *кг*.

Дано:

$l = 5$ *см* $= 0{,}05$ *м*;
$\alpha = 15°$;
$W = 1{,}6 \cdot 10^{-16}$ *дж*;
$d = 1$ *см* $= 0{,}01$ *м*;
$e = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ *к*;
$m = 9{,}1 \cdot 10^{-31}$ *кг*.

U — ?

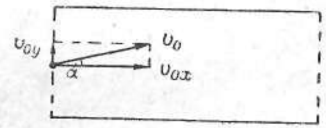


Рис. 75

Решение

Разложим начальную скорость электрона на две составляющие: v_{0x} — скорость вдоль пластин и v_{0y} — скорость, перпендикулярную к пластинам (рис. 75). Очевидно, v_x при движении электрона внутри конденсатора изменяться не будет (в этом направлении силы не действуют); v_y будет изменяться и может стать равной нулю за время пролета электронов в конденсаторе (при соответствующем значении напряженности поля между пластинами). Тогда электрон по выходе из конденсатора будет двигаться со скоростью $v_x = v_{0x}$, т. е. параллельно пластинам.

Составляющие скорости электрона равны:

$$v_{0x} = v_0 \cos\alpha; \ v_{0y} = v_0 \sin\alpha.$$

Внутри конденсатора скорость электрона равна

$$v_x = v_{0x}, \ v_y = v_{0y} - at;$$

v_y станет равной нулю при $a = \frac{v_{0y}}{t}$,

$$a = \frac{v_0 \sin\alpha}{t},$$

где t — время движения электрона между пластинами;

$$t = \frac{l}{v_x} = \frac{l}{v_0 \cos\alpha}.$$

1/46 Зак. 1350

С другой стороны, по второму закону Ньютона

$$a=\frac{F}{m}=\frac{eE}{m}=\frac{eU}{md},$$

где E — напряженность поля; e — заряд электрона, U — разность потенциалов между пластинами.

Приравняв правые части формул для ускорения и подставив вместо t его значение, получим

$$\frac{eU}{md}=\frac{v_0^2\sin\alpha\cdot\cos\alpha}{l},$$

откуда

$$U=\frac{mv_0^2\, d\sin 2\alpha}{2el}.$$

Так как $\frac{mv_0^2}{2}=W$,

то

$$U=\frac{Wd\sin 2\alpha}{el}.$$

После подстановки численных значений найдем

$$U=\frac{1{,}6\cdot10^{-16}\cdot0{,}01\cdot0{,}5}{1{,}6\cdot10^{-19}\cdot0{,}05}=100\ в.$$

Как видно из решения, значение m электрона не понадобилось.

149. В однородное электрическое поле плоского конденсатора, к которому приложена разность потенциалов 50 *в*, влетает пучок электронов, движущихся со скоростью $7\cdot10^6$ *м/сек* (рис. 76). Длина пластин конденсатора 10 *см*; расстояние между ними 5 *см*. На сколько отклонится пучок электронов при выходе из поля конденсатора?

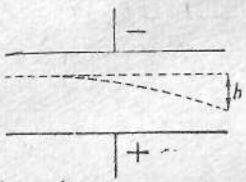


Рис. 76

Дано:

$U=50$ *в*;
$v=7\cdot10^6$ *м/сек*;
$l=10$ *см* $=0{,}1$ *м*;
$d=5$ *см* $=0{,}05$ *м*;
$e=1{,}6\cdot10^{-19}$ *к*;
$m=9{,}1\cdot10^{-31}$ *кг*.

h — ?

Решение

На каждый электрон катодного пучка, движущегося в горизонтальном направлении между пластинами конденсатора, будет действовать сила электрического поля $F=eE$, где e — заряд электрона, а E — напряженность поля.

Под действием этой силы электрон будет смещаться вниз с ускорением

$$a=\frac{F}{m},$$

где m — масса электрона. Поэтому электрон одновременно движется равномерно в горизонтальном направлении и равноускоренно вниз под действием сил электрического поля. В результате этого движение электрона в поле конденсатора происходит по параболе. Смещение электрона вниз $h=\frac{at^2}{2}$, где $a=\frac{F}{m}=\frac{eE}{m}$ и $t=\frac{l}{v}$ — время движения электрона внутри конденсатора.

Таким образом,

$$h=\frac{at^2}{2}=\frac{\frac{F}{m}\left(\frac{l}{v}\right)^2}{2}=\frac{eUl^2}{2\,mdv^2},$$

$$h=\frac{1{,}6\cdot10^{-19}\ к\cdot50\ в\cdot10^{-2}\ м^2}{2\cdot9{,}1\cdot10^{-31}\ кг\cdot5\cdot10^{-2}\ м\cdot49\cdot10^{12}\ м^2/сек^2}\approx1{,}8\cdot10^{-2}\ м=1{,}8\ см.$$

При выходе из поля конденсатора электроны будут двигаться прямолинейно.

ПОСТОЯННЫЙ ЭЛЕКТРИЧЕСКИЙ ТОК

150. Параллельно расположенные квадратные пластины присоединены к аккумулятору напряжением 600 *в*. Определить величину тока, проходящего через аккумулятор, если одна из пластин сдвигается относительно другой со скоростью 6 *см/сек*. Стороны пластин равны 10 *см*; расстояние между пластинами 1 *мм*.

Дано:

$U=600$ *в*;
$v=6$ *см/сек* $=0{,}06$ *м/сек*;
$b=10$ *см* $=0{,}1$ *м*;
$d=1$ *мм* $=0{,}001$ *м*.

I — ?

Решение

Величина тока зависит от изменения во времени электрического заряда на пластинах (рис. 77):

$$I = \frac{\Delta q}{t},$$

где Δq — изменение заряда за время t.

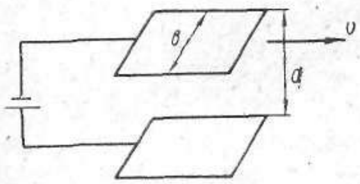


Рис. 77

При перемещении одной пластины относительно другой меняется емкость конденсатора, а изменение заряда при постоянной разности потенциалов пропорционально изменению емкости, т. е.

$$\Delta q = U\Delta C = U\frac{\varepsilon\varepsilon_0 \Delta S}{d},$$

где $\varepsilon_0 = 8{,}85 \cdot 10^{-12}$ *ф/м* — диэлектрическая проницаемость вакуума.

Таким образом,

$$I = \frac{U\varepsilon\varepsilon_0}{d} \cdot \frac{\Delta S}{t},$$

где $\frac{\Delta S}{t}$ — изменение во времени площади пластин, находящихся друг над другом.

Так как сторона пластин b, а скорость равномерного движения v, то изменение площади за 1 *сек* равно

$$\frac{\Delta S}{t} = bv.$$

Подставляя полученное значение в формулу для определения величины тока, получим

$$I = \frac{U\varepsilon\varepsilon_0}{d} \cdot bv,$$

$$I = \frac{600 \ в \cdot 8{,}85 \cdot 10^{-12} \ ф/м \cdot 0{,}1 \ м \cdot 0{,}06 \ м/сек}{0{,}001 \ м} = 3{,}18 \cdot 10^{-8} \ а.$$

151. Плоский конденсатор, ширина обкладок пластин у которого 20 *см* и расстояние между ними 2 *мм*, подсоединен к источнику тока с электродвижущей силой 120 *в*. В пространство между обкладками конденсатора со скоростью 10 *см/сек* вдвигают стеклянную пластинку с диэлектрической проницаемостью 6 (рис. 78). Определить величину тока, протекающего через гальванометр. Сопротивлением источника тока и гальванометра пренебречь.

Дано:

$b = 20$ *см* $= 0{,}2$ *м*;
$d = 2$ *мм* $= 2 \cdot 10^{-3}$ *м*;
$U = 120$ *в*;
$\varepsilon = 6$;
$v = 10$ *см/сек* $= 0{,}1$ *м/сек*.

I — ?

Решение

При движении стеклянной пластинки изменяется емкость конденсатора. Так как потенциал пластин постоянный, то изменение емкости связано с изменением заряда на пластинах конденсатора следующим соотношением:

$$\Delta q = U\Delta C.$$

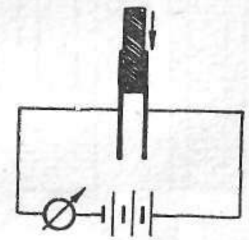


Рис. 78

Емкость воздушного конденсатора

$$C_1 = \frac{\varepsilon_0 S}{d},$$

где ε_0 — диэлектрическая проницаемость вакуума; S — площадь пластин.

Емкость конденсатора с диэлектриком

$$C_2 = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 S}{d}.$$

Изменение емкости конденсатора после полного заполнения пространства между пластинками диэлектриком

$$\Delta C = C_2 - C_1 = \frac{\varepsilon_0(\varepsilon - 1)S}{d}.$$

Если длину пластины конденсатора обозначить через l, то

$$\Delta C = \frac{\varepsilon_0(\varepsilon - 1)bl}{d}.$$

Изменение емкости конденсатора происходит в течение времени

$$\Delta t = \frac{l}{v}.$$

Тогда ток, протекающий в цепи,

$$I = \frac{\Delta q}{\Delta t} = \frac{\varepsilon_0(\varepsilon - 1)Ubl}{d} \cdot \frac{v}{l} = \frac{\varepsilon_0(\varepsilon - 1)Ubv}{d},$$

$$I = \frac{8{,}85 \cdot 10^{-12} \ к^2/н \cdot м^2 \cdot 5 \cdot 120 \ в \cdot 0{,}2 \ м \cdot 0{,}1 \ м/сек}{2 \cdot 10^{-3} \ м} \approx 0{,}53 \cdot 10^{-7} а = 0{,}53 \ ма.$$

152. В стеклянную трубку со ртутью вставлен медный стержень (рис. 79). При этом длина и площадь поперечного сечения ртутного столба кольцевого сечения и стержня оказались одинаковыми. Найти отношение сопротивления системы стержень — ртуть, когда стержень соприкасается с поверхностью ртути, к сопротивлению системы, когда стержень находится в ртути. Удельное сопротивление меди $1{,}71 \cdot 10^{-8}$, ртути $9{,}4 \cdot 10^{-7}$ *ом·м.*

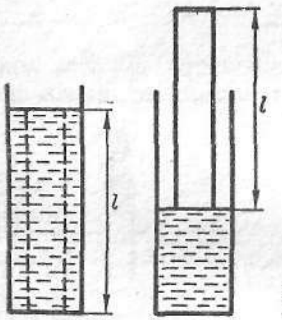


Рис. 79

Дано:

$\rho_1 = 1{,}71 \cdot 10^{-8}$ *ом·м;*
$\rho_2 = 9{,}4 \cdot 10^{-7}$ *ом·м.*

$\frac{R_4}{R_3}$ — ?

Решение

При погружении медного стержня в ртуть столб ртути имеет длину и сечение, равные длине и сечению стержня. Обозначая через R_1 сопротивление стержня, а через R_2 сопротивление ртутного столба, получим

$$R_1 = \rho_1 \frac{l}{S}; \quad R_2 = \rho_2 \frac{l}{S}.$$

Рассматривая стержень и ртутный столб как параллельно соединенные проводники, определим их общее сопротивление R_3 по формуле

$$\frac{1}{R_3} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} = \frac{S}{\rho_1 l} + \frac{S}{\rho_2 l},$$

откуда

$$R_3 = \frac{l \rho_1 \rho_2}{S(\rho_1 + \rho_2)}.$$

Когда стержень соприкасается с поверхностью ртути, соединение проводников последовательное. Сопротивление стержня остается прежним, а сопротивление ртутного столба изменяется в результате уменьшения его высоты вдвое и увеличения сечения в два раза, следовательно,

$$R_2' = \rho_2 \frac{\frac{l}{2}}{2S} = \rho_2 \frac{l}{4S} = \frac{R_2}{4}.$$

Общее сопротивление

$$R_4 = R_1 + R_2' = \rho_1 \frac{l}{S} + \rho_2 \frac{l}{4S} = \frac{l}{S}\left(\rho_1 + \frac{\rho_2}{4}\right).$$

Отношение сопротивлений

$$\frac{R_4}{R_3} = \frac{\left(\rho_1 + \frac{\rho_2}{4}\right)(\rho_1 + \rho_2)}{\rho_1 \cdot \rho_2} = \frac{(4\rho_1 + \rho_2)(\rho_1 + \rho_2)}{4\rho_1\rho_2},$$

$$\frac{R_4}{R_3} = \frac{(6{,}84 \cdot 10^{-8} + 9{,}4 \cdot 10^{-7})(1{,}71 \cdot 10^{-8} + 9{,}4 \cdot 10^{-7})}{4 \cdot 1{,}71 \cdot 10^{-8} \cdot 9{,}4 \cdot 10^{-7}} \approx 15.$$

153. К потенциометру сопротивлением 4000 *ом* приложена разность потенциалов в 110 *в.* Между концом потенциометра и движком включен вольтметр сопротивлением 10 000 *ом.* Что покажет вольтметр, если движок стоит посредине потенциометра?

Дано:

$R = 4000$ *ом;*
$U = 110$ *в;*
$r = 10\,000$ *ом.*

U_{AB} — ?

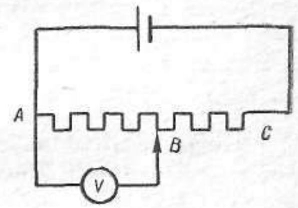


Рис. 80

Решение

Напряжение между точками A и B будет тем напряжением, которое покажет вольтметр (рис. 80). Между точками A и B включены параллельно половина сопротивления потенциометра и сопротивление вольтметра.

$$R_{AB} = \frac{\frac{R}{2} r}{R/2 + r} = \frac{Rr}{R + 2r}.$$

Общее сопротивление цепи равно

$$R_{AC} = R_{AB} + R_{BC} = \frac{R}{2} + \frac{Rr}{R + 2r} = \frac{R(R + 4r)}{2(R + 2r)}.$$

Ток, протекающий в общей цепи, равен

$$I = \frac{U}{R_{AC}} = \frac{2U(R + 2r)}{R(R + 4r)}.$$

Тогда напряжение между точками A и B составит

$$U_{AB} = IR_{AB} = \frac{2U(R + 2r)Rr}{R(R + 4r)(R + 2r)} = \frac{2Ur}{R + 4r}$$

или

$$U_{AB} = 50 \text{ в}.$$

154. Определите полный ток, текущий от батареи, и ток, текущий через сопротивление R_2, для цепи, изображенной на рис. 81, если $R_1 = 2$ *ом*, $R_2 = 6$ *ом*, $R_3 = 1{,}5$ *ом*, $R_4 = 3$ *ом*. Источник тока создает напряжение во внешней цепи 6 *в*.

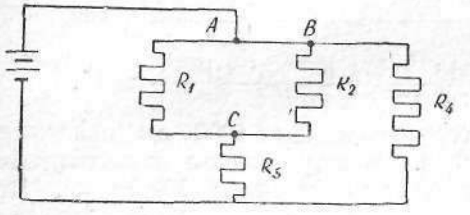


Рис. 81

Дано:

$R_1 = 2$ *ом*;
$R_2 = 6$ *ом*;
$R_3 = 1{,}5$ *ом*;
$R_4 = 3$ *ом*;
$U = 6$ *в*.

I — ? I' — ?

Решение

Чтобы найти полный ток I, текущий от батареи, необходимо сначала найти сопротивление цепи $R_{об}$. Так как сопротивления R_1 и R_2 соединены параллельно, сопротивление этого соединения определяется из формулы

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}, \quad R = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}.$$

Эта цепь последовательно соединена с сопротивлением R_3. Следовательно, полное сопротивление R' всей левой ветви равно

$$R' = R + R_3 = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} + R_3 = \frac{R_1 R_2 + R_3 (R_1 + R_2)}{R_1 + R_2}.$$

Наконец, левая ветвь соединена параллельно с сопротивлением R_4.

Таким образом,

$$\frac{1}{R_{об}} = \frac{1}{R'} + \frac{1}{R_4} = \frac{(R_1 + R_2)(R_3 + R_4) + R_1 R_2}{[R_1 R_2 + (R_1 + R_2) R_3] R_4}.$$

Полный ток, текущий от батареи, равен

$$I = \frac{U}{R_{об}} = U \frac{(R_1 + R_2)(R_3 + R_4) + R_1 R_2}{[R_1 R_2 + (R_1 + R_2) R_3] R_4},$$

$$I = 6 \text{ в} \frac{8 \cdot 4{,}5 + 12}{(12 + 12)\, 3 \text{ ом}} = 4 \text{ а}.$$

Для определения тока, текущего через сопротивление R_2, надо найти сначала ток I_1 в левой ветви:

$$I_1 = \frac{U}{R_1} = \frac{U (R_1 + R_2)}{R_1 R_2 + (R_1 + R_2) R_3}, \quad I_1 = \frac{6 \text{ в} \cdot 8 \text{ ом}}{24 \text{ ом}^2} = 2 a.$$

Учитывая, что напряжение на сопротивлениях R_1 и R_2 будет одинаковым, ток распределяется следующим образом: 75% (1,5 *а*) тока I_1 течет через сопротивление R_1 и 25% (0,5 *а*) тока I_1 — через сопротивление R_2. Таким образом,

$$I' = 0{,}5 \text{ а}.$$

155. Четыре проводника одинаковой длины из одного и того же материала соединены последовательно. Диаметры проводников соответственно равны 0,1 *см*, 0,2 *см*, 0,3 *см* и 0,4 *см*. К системе приложено напряжение 100 *в*. Определить падение напряжения на каждом проводнике.

Дано:

$d_1 = 0{,}1$ *см* $= 10^{-3}$ *м*;
$d_2 = 0{,}2$ *см* $= 2 \cdot 10^{-3}$ *м*;
$d_3 = 0{,}3$ *см* $= 3 \cdot 10^{-3}$ *м*;
$d_4 = 0{,}4$ *см* $= 4 \cdot 10^{-4}$ *м*;
$U = 100$ *в*.

U_1, U_2, U_3, U_4 — ?

Решение

Сопротивления проводников соответственно равны:

$$R_1 = \rho \frac{4l}{\pi d_1^2}; \quad R_2 = \rho \frac{4l}{\pi d_2^2}; \quad R_3 = \rho \frac{4l}{\pi d_3^2}; \quad R_4 = \rho \frac{4l}{\pi d_4^2}.$$

Общее сопротивление цепи

$$R = R_1 + R_2 + R_3 + R_4 = \frac{4l\rho}{\pi} \left(\frac{1}{d_1^2} + \frac{1}{d_2^2} + \frac{1}{d_3^2} + \frac{1}{d_4^2} \right).$$

Ток, текущий в цепи,

$$I = \frac{U}{R}.$$

Падение напряжения на первом сопротивлении

$$U_1 = IR_1 = U\frac{R_1}{R} = \frac{U\frac{\rho 4l}{\pi d_1^2}}{\frac{4\rho l}{\pi}\left(\frac{1}{d_1^2}+\frac{1}{d_2^2}+\frac{1}{d_3^2}+\frac{1}{d_4^2}\right)} =$$

$$= \frac{U}{d_1^2\left(\frac{1}{d_1^2}+\frac{1}{d_2^2}+\frac{1}{d_3^2}+\frac{1}{d_4^2}\right)} =$$

$$= \frac{Ud_2^2d_3^2d_4^2}{d_1^2d_2^2d_3^2+d_2^2d_3^2d_4^2+d_3^2d_4^2d_1^2+d_4^2d_1^2d_2^2};$$

$$U_1 = 70{,}2\,в; \quad U_2 = IR_2.$$

При этом

$$\frac{U_2}{U_1} = \frac{R_2}{R_1}; \quad U_2 = U_1\frac{d_1^2}{d_3^2} = 17{,}6\,в;$$

Аналогично для напряжений U_3 и U_4:

$$U_3 = U_1\frac{d_1^2}{d_2^2} = 7{,}8\,в;$$

$$U_4 = U_1\frac{d_1^2}{d_4^2} = 4{,}4\,в.$$

Общее падение напряжений

$$U = U_1+U_2+U_3+U_4 = 70{,}2\,в + 17{,}6\,в + 7{,}8\,в + 4{,}4\,в = 100\,в.$$

156. Между обкладками плоского конденсатора находятся две пластинки: стеклянная толщиной 1 *мм* и мраморная толщиной 4 *мм*. К обкладкам конденсатора приложено напряжение 1000 *в*. Определить падение напряжения на обеих пластинках, если проводимость стекла и мрамора соответственно равна 10^{-10} *ом*$^{-1}\cdot$*м*$^{-1}$ и 10^{-8} *ом*$^{-1}\cdot$*м*$^{-1}$.

Дано:

$d_1 = 1$ *мм* $= 10^{-4}$ *м*;
$d_2 = 4$ *мм* $= 4\cdot10^{-4}$ *м*;
$U = 1000$ *в*;
$\gamma_1 = 10^{-10}$ *ом*$^{-1}\cdot$*м*$^{-1}$;
$\gamma_2 = 10^{-8}$ *ом*$^{-1}\cdot$*м*$^{-1}$.

U_1 — ? U_2 — ?

Решение

Напряжение на обкладках конденсатора разделяется на две части (рис. 82)

$$U = U_1 + U_2.$$

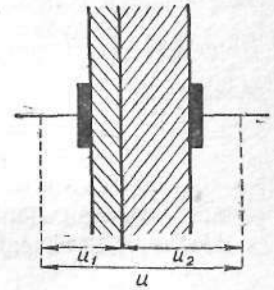


Рис. 82

Через конденсатор пройдет ток

$$I = \frac{U_1}{R_1} = \frac{U_2}{R_2},$$

где R_1 и R_2 — сопротивления стеклянной и мраморной пластинок.

Тогда

$$U_2 = U_1\frac{R_2}{R_1} = U_1\frac{\frac{1}{\gamma_2}\cdot\frac{d_2}{S}}{\frac{1}{\gamma_1}\cdot\frac{d_1}{S}} = U_1\frac{\gamma_1 d_2}{\gamma_2 d_1}.$$

Так как

$$U = U_1 + U_2 = U_1\frac{\gamma_1 d_2}{\gamma_2 d_1} + U_1 = U_1\frac{\gamma_1 d_2 + \gamma_2 d_1}{\gamma_2 d_1},$$

то

$$U_1 = U\frac{\gamma_2 d_1}{\gamma_1 d_2 + \gamma_2 d_1}, \quad U_1 = \frac{1000\,в\cdot10^{-8}\,ом^{-1}\,м^{-1}\cdot10^{-4}\,м}{(10^{-10}\cdot4\cdot10^{-4}+10^{-8}\cdot10^{-4})\,ом^{-1}} \approx 962\,в.$$

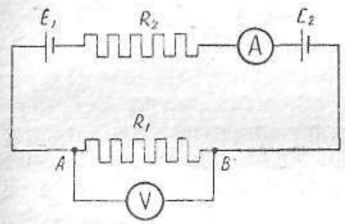


Рис. 83

Откуда

$$U_2 = U - U_1 = 1000 - 962 = 38\,в.$$

157. Два источника тока с электродвижущими силами 1,5 *в* и 1,2 *в* включены в цепь с помощью сопротивлений R_1 и R_2 (рис. 83). Включенный в цепь амперметр показывает величину тока 60 *ма*. При подключении к сопротивлению R_1 вольтметра величина тока возрастает на 3 *ма*. Найти показание вольтметра, если сопротивление R_1 равно 10 *ом*.

Дано:

$E_1 = 1{,}5$ *в*;
$E_2 = 1{,}2$ *в*;
$R_1 = 10$ *ом*;
$I = 60$ *ма* $= 60\cdot10^{-3}$ *а*;
$\Delta I = 3$ *ма* $= 3\cdot10^{-3}$ *а*.

U — ?

Решение

Включение вольтметра вызывает изменение сопротивления цепи. Если R_V — внутреннее сопротивление вольтметра, то при его присоединении к сопротивлению R_1 сопротивление участка AB станет равным $R = \frac{R_1 R_V}{R_1 + R_V}$. Первоначальный ток в цепи по закону Ома равен

$$I = \frac{E_1 + E_2}{r_1 + r_2 + R_1 + R_2 + R_A},$$

где R_A — сопротивление амперметра; r_1 и r_2 — соответственно внутренние сопротивления первого и второго источников тока.

После подключения вольтметра

$$I + \Delta I = \frac{E_1 + E_2}{r_1 + r_2 + R + R_2 + R_A}.$$

После преобразований получим искомое показание вольтметра

$$U = (I + \Delta I) R = (I + \Delta I) R_1 - \frac{\Delta I}{I}(E_1 + E_2),$$

$$U = (60 \cdot 10^{-3} + 3 \cdot 10^{-3}) \cdot 10 - \frac{3 \cdot 10^{-3}}{60 \cdot 10^{-3}} (1{,}5 + 1{,}2) = 0{,}5 \text{ в}.$$

158. В каком из сопротивлений выделяется наибольшее количество тепла (рис. 84)?

Решение

Количество тепла, выделяющегося на сопротивлении, пропорционально величине тока и напряжению. Если два сопротивления соединены последовательно, то через них протекает ток одинаковой величины, а напряжение больше на большем сопротивлении. В этом случае больше тепла выделяется на большем сопротивлении, т. е. на R_2 больше, чем на R_1, а на R_4 больше, чем на R_3. Если же две цепи включены параллельно, то напряжение на них одинаково, а больший ток течет по ветви с меньшим сопротивлением. Поэтому больше тепла выделяется на ветви с меньшим сопротивлением, т. е. на верхней. Из этого следует, что максимальное количество тепла выделяется на сопротивлении R_2.

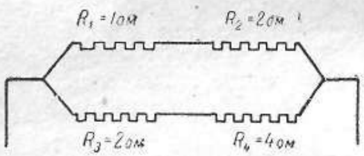


Рис. 84

159. Вычислить показания каждого из вольтметров и отметить значком (+) сторону его большего потенциала (рис. 85).

Решение

Вольтметр, подключенный к полюсам замкнутого источника тока, показывает напряжение на его зажимах:

$$U = E - Ir,$$

где E — электродвижущая сила источника; I — величина тока в цепи; r — внутреннее сопротивление.

Отсюда решение задачи может быть дано в таком виде:

$$I = \frac{\Sigma E}{\Sigma r + R}, \quad I = \frac{22}{8} = 2{,}75 \ (a).$$

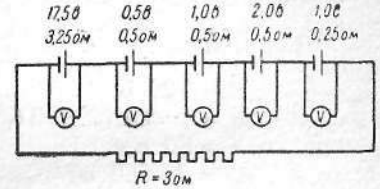


Рис. 85

Показания вольтметров следующие:

1) $U_1 = E_1 - Ir_1$, $U_1 = 17{,}5 - 8{,}937 = 8{,}563$ *в*;
2) $U_2 = E_2 - Ir_2$, $U_2 = 0{,}5 - 1{,}375 = -0{,}875$ *в*;
3) $U_3 = E_3 - Ir_3$, $U_3 = 1 - 1{,}375 = -0{,}375$ *в*;
4) $U_4 = E_4 - Ir_4$, $U_4 = 2 - 1{,}375 = 0{,}625$ *в*;
5) $U_5 = E_5 - Ir_5$, $U_5 = 1{,}0 - 0{,}637 = 0{,}363$ *в*.

Для второго и третьего элементов ответ получился отрицательный; это значит, что падение напряжения внутри источника больше его электродвижущей силы, источник не дает энергии во внешнюю цепь, а сам ее получает. В этом случае потенциал отрицательного полюса источника больше положительного, следовательно, положительную клемму вольтметра надо присоединить к отрицательному полюсу источника.

160. Вагон освещается пятью лампочками, включенными последовательно. Уменьшится ли расход электроэнергии, если уменьшить число лампочек до четырех?

Решение

Мощность N, потребляемая цепью сопротивлением R при напряжении U, выражается формулой

$$N = \frac{U^2}{R},$$

т. е. расход энергии обратно пропорционален сопротивлению цепи.

Но сопротивление последовательного соединения четырех лампочек R_4 меньше сопротивления последовательного соединения пяти лампочек R_5. Поэтому потребляемая мощность в случае четырех лампочек увеличится (хотя лампочек меньше, но они горят ярче, ибо вследствие меньшего сопротивления через них течет больший ток).

161. На паспорте счетчика обозначено «1 *квт·ч* = 14 680 оборотов якоря». При проверке счетчика его диск сделал 120 оборотов за 50 *сек*. Определить потребляемую мощность.

Дано:

$n = 120$ об.;
$A = 1$ *квт·ч* $= 3\,600\,000$ *дж*;
$t = 50$ *сек*;
$n_0 = 14\,680$ об.

N — ?

Решение

Постоянная счетчика характеризует количество потребляемой в сети энергии за один оборот диска. За 1 *сек* диск по условиям задачи делает следующее количество оборотов:

$$n_1 = \frac{n}{t} = \frac{120}{50}\ об/сек = 2{,}4\ об/сек.$$

Тогда

$$k = \frac{A}{n_0},\ k = \frac{3\,600\,000\ дж}{14\,680\ об.} = 245{,}2\ дж/об.$$

Следовательно, работа тока за 1 *сек*, численно равная мощности тока, составит

$$N = n_1 k = 245{,}2 \cdot 2{,}4 = 590\ вт.$$

Окончательно получим

$$N = 590\ вт.$$

162. Можно ли две лампочки накаливания мощностью 60 и 40 *вт*, рассчитанные на напряжение 110 *в*, включать в цепь с напряжением 220 *в* при соединении их последовательно?

Дано:

$N_1 = 60$ *вт*;
$N_2 = 40$ *вт*;
$U_1 = 110$ *в*;
$U_2 = 220$ *в*.

$\frac{U_3}{U_4}$ — ?

Решение

Лампочки можно было бы последовательно включать в цепь с напряжением 220 *в*, если бы на каждой из них падение напряжения было 110 *в*. В действительности падение напряжения на лампочках будет неодинаковым. Рассчитаем, какое падение напряжения приходится на каждую лампочку. Мощность первой лампочки будет равна

$$N_1 = \frac{U_1^2}{R_1},$$

второй —

$$N_2 = \frac{U_1^2}{R_2},$$

откуда

$$\frac{R_1}{R_2} = \frac{N_2}{N_1}.$$

При включении лампочек последовательно в цепь с напряжением 220 *в* через них потечет общий ток I. Падение напряжения на лампочках равно

$$U_3 = IR_1,\ U_4 = IR_2$$

или

$$\frac{U_3}{U_4} = \frac{IR_1}{IR_2} = \frac{N_2}{N_1} = \frac{40}{60} = \frac{2}{3}.$$

Так как $U_3 + U_4 = U_2$, то после решения двух последних уравнений получим $U_3 = 88$ *в*, $U_4 = 132$ *в*. Отсюда видно, что первая лампочка горит с недокалом, а вторая — с перекалом. Продолжительность горения второй лампочки будет сокращена.

163. Две спирали из константана и никелина соединены между собой параллельно. Отношение их длин $l_1 : l_2 = 15 : 14$, площадей поперечного сечения $S_1 : S_2 = 5 : 4$. При помещении спиралей в калориметр выяснилось, что за одинаковое время они выделяют равное количество теплоты. Определить отношение удельных сопротивлений константана и никелина.

Дано:

$l_1 : l_2 = 15 : 14$;
$S_1 : S_2 = 5 : 4$.

$\frac{\rho_1}{\rho_2}$ — ?

Решение

Количество выделившейся теплоты равно:

$$Q_1 = I_1^2 R_1 t;$$
$$Q_2 = I_2^2 R_2 t.$$

Так как $Q_1 = Q_2$, то

$$\frac{Q_1}{Q_2} = \left(\frac{I_1}{I_2}\right)^2 \frac{R_1}{R_2} = 1.$$

При параллельном соединении

$$I_1 R_1 = I_2 R_2, \quad \frac{I_1}{I_2} = \frac{R_2}{R_1},$$

откуда

$$\frac{R_2}{R_1} = 1,$$

но

$$R_1 = \rho_1 \frac{l_1}{S_1} \text{ и } R_2 = \rho_2 \frac{l_2}{S_2}.$$

Тогда

$$\frac{\rho_1}{\rho_2} = \frac{l_2 S_1}{l_1 S_2} = 1{,}17.$$

164. Элемент замыкается проволокой один раз сопротивлением 4 *ом*, другой — сопротивлением 9 *ом*. В том и в другом случае количество тепла, выделяющегося в проволоках за одно и то же время, оказывается одинаковым. Каково внутреннее сопротивление элемента?

Дано:

$R_1 = 4$ *ом*;
$R_2 = 9$ *ом*.

r — ?

Решение

Условие задачи можно записать следующим образом:

$$Q_1 = Q_2; \; I_1^2 R_1 t = I_2^2 R_2 t,$$

откуда

$$I_1^2 R_1 = I_2^2 R_2.$$

С другой стороны, на основании закона Ома для полной цепи

$$E = I_1 (r + R_1), \quad E = I_2 (r + R_2).$$

Из равенства $I_1^2 R_1 = I_2^2 R_2$ следует

$$\frac{I_1}{I_2} = \sqrt{\frac{R_2}{R_1}},$$

а из равенства $I_1 (r + R_1) = I_2 (r + R_2)$

$$\frac{I_1}{I_2} = \frac{r + R_2}{r + R_1}.$$

Решая совместно два последних уравнения, найдем, что

$$r = \frac{R_2 - R_1 \sqrt{\frac{R_2}{R_1}}}{\sqrt{\frac{R_2}{R_1}} - 1} = \sqrt{R_1 R_2}.$$

После подстановки численных значений получим

$$r = \sqrt{4 \cdot 9} = 6 \; (ом).$$

165. Лампочка накаливания мощностью N_1 рассчитана на напряжение U_1. Другая лампочка накаливания мощностью N_2 работает при напряжении U_2. Температуры свечения нитей в обеих лампочках равны между собой. Количество тепла, отдаваемое обеими проволочками, пропорционально их поверхностям. Каковы отношения диаметров и длин нитей для обеих лампочек накаливания?

Решение

Пусть I_1 — величина тока, R_1 — сопротивление, l_1 — длина, d_1 — диаметр нити первой лампочки, I_2, R_2, l_2, d_2 — соответственно величина тока, сопротивление, длина и диаметр нити второй лампочки. Будем считать, что спирали обеих лампочек изготовлены из одного материала. Количество тепла, выделившегося в спиралях за время t, будет равно:

$$Q_1 = I_1^2 R_1 t = k \pi d_1 l_1;$$
$$Q_2 = I_2^2 R_2 t = k \pi d_2 l_2,$$

где k — коэффициент пропорциональности. Так как $Q_1 = Q_2$, то, разделив уравнения друг на друга, получим

$$\frac{I_1^2 R_1}{I_2^2 R_2} = \frac{d_1 l_1}{d_2 l_2}.$$

Но

$$I_1 = \frac{N_1}{U_1};\quad R_1 = \rho\frac{4l_1}{\pi d_1^2};$$

$$I_2 = \frac{N_2}{U_2};\quad R_2 = \rho\frac{4l_2}{\pi d_2^2}.$$

Подставляя данные значения в формулу

$$\frac{I_1^2R_1}{I_2^2R_2} = \frac{d_1l_1}{d_2l_2},$$

после упрощения получим

$$\frac{d_2}{d_1} = \sqrt[3]{\frac{N_2^2U_1^2}{N_1^2U_2^2}}.$$

Чтобы найти отношения длин двух проволок, используем следующую зависимость:

$$R_1 = \rho\frac{4l_1}{\pi d_1^2} = \frac{U_1^2}{N_1};\quad R_2 = \rho\frac{4l_2}{\pi d_2^2} = \frac{U_2^2}{N_2}.$$

Разделив данные равенства друг на друга и учитывая предыдущую формулу, после упрощения получим

$$\frac{l_2}{l_1} = \sqrt[3]{\frac{N_2U_2^2}{N_1U_1^2}}.$$

166. В электрическом чайнике две секции. При включении в сеть одной из них вода в чайнике закипает за 20 *мин*, при включении другой — за 30 *мин*. Сколько потребуется времени для кипячения воды при включении в сеть обеих секций: а) последовательно, б) параллельно?

Дано:

$t_1 = 20$ *мин*;
$t_2 = 30$ *мин*.

t'_1 — ?
t'_2 — ?

Решение

Количество выделяемого секциями тепла во всех случаях одинаково. Одинаково и напряжение в сети. Пусть R_1 — сопротивление первой секции чайника, R_2 — второй. Тогда

$$Q = \frac{U^2}{R_1}t_1 = \frac{U^2}{R_2}t_2$$

или

$$\frac{t_1}{R_1} = \frac{t_2}{R_2},\quad \frac{20}{R_1} = \frac{30}{R_2},\quad R_2 = \frac{3}{2}R_1.$$

При последовательном соединении обеих секций общее сопротивление

$$R = R_1 + R_2 = \frac{5}{2}R_1,$$

откуда

$$\frac{U^2}{R_1}t_1 = \frac{U^2}{\frac{5}{2}R_1}t'_1.$$

Решив это уравнение относительно t'_1, найдем

$$t'_1 = \frac{5}{2}t_1 = 50 \text{ мин}.$$

При параллельном соединении

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} = \frac{5}{3R_1};\quad R = \frac{3}{5}R_1,$$

откуда

$$\frac{U^2}{R_1}t_1 = \frac{U^2}{\frac{3}{5}R_1}t'_2.$$

Решив уравнение относительно t'_2, найдем

$$t_2 = \frac{3}{5}t'_2 = 12 \text{ мин}.$$

167. По медным проводам электрическая энергия передается на расстояние 5 *км*, при этом потери на ленц-джоулево тепло в подводящих проводах составляют 3% передаваемой энергии. Какое количество меди требуется на подводящие провода, если энергия будет передаваться при напряжении 2000 *в* и мощность электрического тока на подводящих проводах у магистрали равна 10^5 *вт*? Плотность меди 8900 *кг/м³*.

Дано:

$l = 10$ *км* $= 10^4$ *м*;
$U = 2000$ *в*;
$N = 10^5$ *вт*;
$D = 8900$ *кг/м*^{3};
$\eta = 0{,}03$.
m — ?

Решение

Так как потери электроэнергии в подводящих проводах не должны превышать 3% от передаваемой мощности N, то

$$N_1 = \eta N,$$

где N_1 — потери мощности в проводах. Но

$$N_1 = I^2 R \text{ или } R = \frac{N_1}{I^2},$$

где R — сопротивление подводящих проводов и $I = \frac{N}{U}$ — сила тока в проводах.

$$R = \frac{N_1}{I^2} = \frac{\eta N U^2}{N^2} = \frac{\eta U^2}{N}.$$

Сопротивление R можно определить так: $R = \rho \frac{l}{S}$, откуда $S = \frac{\rho l}{R}$. Тогда

$$m = lSD = \frac{\rho l^2 ND}{\eta U^2},$$

$$m = \frac{1{,}71 \cdot 10^{-8}\ \text{ом} \cdot \text{м} \cdot 10^8\ \text{м}^2 \cdot 10^5\ \text{вт} \cdot 8900\ \text{кг/м}^3}{0{,}03 \cdot 4 \cdot 10^6\ \text{в}^2} \approx 1{,}27 \cdot 10^4\ \text{кг}.$$

168. Неполяризующийся гальванический элемент замыкают проводником сопротивлением 0,6 *ом*, причем по цепи идет ток величиной 0,9 *а*. Если тот же элемент замкнуть проводником сопротивлением 1,2 *ом*, то величина тока составит 0,6 *а*. Определить электродвижущую силу и внутреннее сопротивление элемента.

Дано:

$R_1 = 0{,}6$ *ом*;
$I_1 = 0{,}9$ *а*;
$R_2 = 1{,}2$ *ом*;
$I_2 = 0{,}6$ *а*.
E — ?
r — ?

Решение

Электродвижущая сила неполяризующегося гальванического элемента не зависит от нагрузки. В силу закона Ома для замкнутой цепи

$$E = I_1(r + R_1);$$
$$E = I_2(r + R_2).$$

Исключим из этих уравнений E и решим получившееся уравнение относительно r:

$$r = \frac{I_2 R_2 - I_1 R_1}{I_1 - I_2}.$$

Подставим полученное значение r в уравнение $E = I_1(r + R_1)$:

$$E = I_1 I_2 \frac{R_2 - R_1}{I_1 - I_2}.$$

После подстановки численных значений получим:

$$E = 0{,}9 \cdot 0{,}6 \frac{1{,}2 - 0{,}6}{0{,}9 - 0{,}6} = 1{,}08\ \text{в};$$

$$r = \frac{0{,}6 \cdot 1{,}2 - 0{,}9 \cdot 0{,}6}{0{,}9 - 0{,}6} = 0{,}6\ \text{ом}.$$

169. Электрическая цепь собрана так, как показано на рис. 86. Электродвижущая сила батареи E_1 равна 12 *в*, а ее внутреннее сопротивление — 1 *ом*. Какова должна быть электродвижущая сила батареи E_2 при ее внутреннем сопротивлении 3 *ом*, чтобы через сопротивление R не проходил ток?

Дано:

$E_1 = 12$ *в*;
$r_1 = 1$ *ом*;
$r_2 = 3$ *ом*.
E_2 — ?

Решение

Пусть величина тока, протекающего через батарею E_1, будет I_1, через батарею $E_2 - I_2$ и через сопротивление $R - I_3$. Так как ток через сопротивление не течет, то $I_3 = 0$.

$$I_1 - I_2 = I_3 = 0.$$

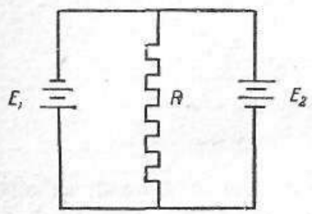


Рис. 86

Отсюда

$$I_1 = I_2.$$

Так как

$$E_1 = I_1 r_1 + I_3 R = I_1 r_1$$

и

$$E_2 = I_2 r_2 + I_3 R = I_2 r_2,$$

то, разделив почленно последние уравнения друг на друга, получим

$$\frac{E_2}{E_1} = \frac{I_2 r_2}{I_1 r_1} = \frac{r_2}{r_1},$$

откуда

$$E_2 = E_1 \frac{r_2}{r_1}.$$

После подстановки численных значений найдем

$$E_2 = 36 \text{ в}.$$

170. Электрическая цепь освещения вагона состоит из 30 параллельно соединенных лампочек с внутренним сопротивлением по 30 *ом* каждая, подключенных к генератору постоянного тока с внутренним сопротивлением 0,04 *ом* и электродвижущей силой, зависящей от скорости движения вагона. Параллельно генератору присоединена батарея аккумуляторов с электродвижущей силой 24 *в* и внутренним сопротивлением 0,02 *ом* (рис. 87). Создает ли батарея аккумуляторов ток во внешней цепи, если электродвижущая сила генератора 24,2 *в*? При какой наименьшей электродвижущей силе генератора внешняя цепь не потребляет ток от батареи?

Дано:

$r = 30$ *ом*;
$n = 30$;
$r_1 = 0{,}02$ *ом*;
$r_2 = 0{,}04$ *ом*;
$E_1 = 24$ *в*;
$E_2 = 24{,}2$ *в*.

$U - ?\ E_{2\,\min} - ?$

Решение

Обозначим ток, текущий в цепи батареи, через I_1, в цепи генератора через I_2 и в общей цепи через I (рис. 87). Тогда

$$I = I_1 + I_2.$$

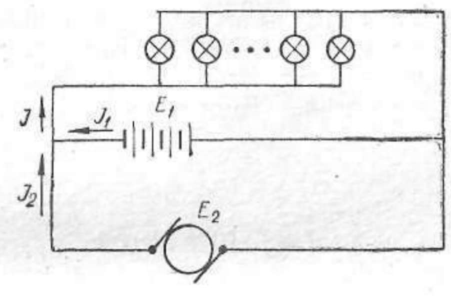


Рис. 87

Если падение напряжения на лампочках U, то

$$I = \frac{U}{\frac{r}{n}} = \frac{nU}{r};\quad I_1 = \frac{E_1 - U}{r_1};\quad I_2 = \frac{E_2 - U}{r_2}.$$

Тогда

$$\frac{nU}{r} = \frac{E_1 - U}{r_1} + \frac{E_2 - U}{r_2}.$$

Из полученного уравнения определим U:

$$\frac{nU}{r} + \frac{U}{r_1} + \frac{U}{r_2} = \frac{E_1}{r_1} + \frac{E_2}{r_2};$$

$$U = \left(\frac{E_1}{r_1} + \frac{E_2}{r_2}\right)\left(\frac{n}{r} + \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}\right)^{-1}.$$

После подстановки численных значений получим

$$U = \left(\frac{24\text{ в}}{0{,}02\text{ ом}} + \frac{24{,}2\text{ в}}{0{,}04\text{ ом}}\right)\left(\frac{30}{30\text{ ом}} + \frac{1}{0{,}02\text{ ом}} + \frac{1}{0{,}04\text{ ом}}\right)^{-1} = 23{,}7\text{ в}.$$

При таком напряжении на лампочках аккумуляторная батарея отдает ток во внешнюю цепь. Батарея не отдает ток при условии, что $U = E_1$.

Тогда

$$\frac{nU}{r} = \frac{E_2 - U}{r_2},$$

откуда

$$E_2 = U\left(1 + \frac{r_2}{r}\,n\right),$$

$$E_{2\,\min} = 24\ в\left(1 + \frac{0{,}04\ ом}{30\ ом}\cdot 30\right) \approx 25\ в.$$

171. Какова температура печи, если помещенная в нее термопара железо — константан ($k = 0{,}05$ *мв/град*) дает на гальванометре чувствительностью 10^{-7} *а/дел* и сопротивлением 1000 *ом* отклонение на 200 делений? Второй спай термопары погружен в тающий лед.

Дано:

$k = 0{,}05$ *мв/град* $= 5\cdot 10^{-5}$ *в/град*;
$c = 10^{-7}$ *а/дел*;
$R = 1000$ *ом*;
$n = 200$ дел.;
$t_1 = 0°$ C.

t_2 — ?

Решение

Электродвижущая сила термопары пропорциональна разности температур обоих спаев:

$$E = k(t_2 - t_1).$$

С другой стороны, по закону Ома

$$E = I_0(R + r),$$

где r — сопротивление термопары. Но так как сопротивлением термопары можно пренебречь, то

$$E = I_0 R.$$

Приравнивая правые части формул для электродвижущей силы, получим

$$k(t_2 - t_1) = I_0 R,$$

откуда

$$t_2 - t_1 = \frac{I_0 R}{k}.$$

Так как $t_1 = 0$, то $t_2 = \frac{I_0 R}{k}$.

Величина тока I_0, исходя из показаний и чувствительности гальванометра, равна

$$I_0 = cn.$$

Окончательно получим

$$t_2 = \frac{c}{k}\,nR,\quad t_2 = \frac{10^{-7}\cdot 200\cdot 1000}{5\cdot 10^{-5}} = 400°\ \mathrm{C}.$$

172. В городскую осветительную сеть напряжением 220 *в* включено последовательно 5 ламп накаливания напряжением 12 *в* каждая. Вычислить величину тока в лампах и добавочное сопротивление, которое потребуется к ним, если сопротивление каждой лампы равно 20 *ом*.

Дано:

$U = 220$ *в*;
$n = 5$;
$U_1 = 12$ *в*;
$R_1 = 20$ *ом*.

I — ? $R_д$ — ?

Решение

Величина тока в цепи определяется по закону Ома:

$$I = \frac{U_1}{R_1},\quad I = \frac{12\ в}{20\ ом} = 0{,}6\ а.$$

Напряжение на n последовательно включенных лампах равно

$$U_2 = nU_1.$$

Напряжение на добавочном сопротивлении

$$U_д = U - U_2 = U - nU_1.$$

Находим величину добавочного сопротивления:

$$R_д = \frac{U_д}{I} = \frac{U - nU_1}{I},\quad R_д = \frac{220\ в - 60\ в}{0{,}6\ а} \approx 267\ ом.$$

173. В электрическую цепь, состоящую из источника тока, гальванометра и сопротивления R_1 (рис. 88, *а*) включен шунт сопротивлением 10 *ом* и вместо сопротивления R_1 включено сопротивление R_2 (рис. 88, *б*). При этом величина тока в цепи не изменилась. Определить сопротивление гальванометра, если известно, что $R = 10$ *ом*, $R_1 = 350$ *ом* и $R_2 = 100$ *ом*.

Дано:

$R = 10$ *ом*;
$R_1 = 350$ *ом*;
$R_2 = 100$ *ом*.

r — ?

Решение

Обозначим внутреннее сопротивление гальванометра через r, а электродвижущую силу источника тока через E. Тогда для цепи, показанной на рис. 88, *а*, можно записать

$$E = I_1(R_1 + r).$$

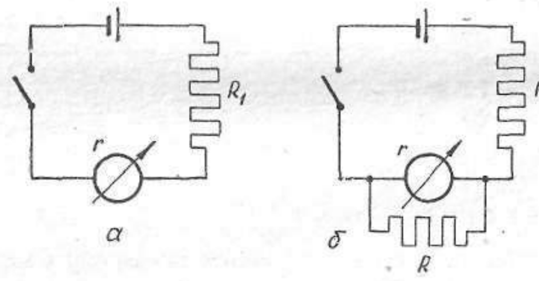


Рис. 88

Для второго случая (рис. 88, *б*)

$$E = I_2(R_2 + R_0),$$

где $R_0 = \frac{Rr}{R+r}$ — сопротивление параллельно соединенных гальванометра и шунта. Так как протекающий через гальванометр ток не изменяется, то ток, протекающий через сопротивление R, равен $I_2 - I_1$. Тогда

$$\frac{I_2 - I_1}{I_1} = \frac{r}{R},$$

откуда

$$I_2 = \frac{I_1(R+r)}{R}.$$

Так как

$$I_1(R_1 + r) = I_2(R_2 + R_0),$$

то, подставляя вместо I_2 и R_0 их значения, можно записать

$$I_1(R_1 + r) = \frac{I_1(R+r)}{R}\left(R_2 + \frac{rR}{r+R}\right).$$

Решая это уравнение относительно r, получим

$$r = \frac{R(R_1 - R_2)}{R_2} = 25 \text{ ом}.$$

174. Каким сопротивлением нужно зашунтировать гальванометр сопротивлением 1000 *ом*, чтобы уменьшить его чувствительность в 50 раз?

Дано:

$R_г = 1000$ *ом*;
$n = 50$.

$R_ш$ — ?

Решение

Чтобы уменьшить чувствительность гальванометра, надо параллельно к нему подключить сопротивление. Тогда через гальванометр пойдет только часть тока. При параллельном соединении проводников токи распределяются обратно пропорционально сопротивлениям ветвей цепи, т. е.

$$\frac{R_ш}{R_г} = \frac{I_г}{I_ш},$$

где $R_ш$ и $I_ш$ — сопротивление шунта и ток, идущий через него; $R_г$ и $I_г$ — сопротивление гальванометра и ток, идущий через него. Общий ток цепи равен сумме токов разветвлений

$$I = I_г + I_ш.$$

Согласно условию задачи, через гальванометр проходит $\frac{1}{n}$ часть общего тока. Поэтому

$$I_г = \frac{1}{n} I, \text{ а } I_ш = \frac{n-1}{n} I.$$

Подставляя эти выражения в первое уравнение, найдем

$$R_ш = \frac{R_г}{n-1}.$$

Следовательно,

$$R_ш = \frac{10^3}{49} = 20{,}4 \text{ ом}.$$

175. Батарея аккумуляторов, э. д. с. которой 12 *в*, заряжается при напряжении 12,5 *в* и величине тока 3 *а*. Внутреннее сопротивление при зарядке и разрядке одинаково, причем аккумулятор отдает 70% количества электричества, прошедшего через него при зарядке. Определить к. п. д. батареи аккумуляторов: а) при разрядке током 3 *а*; б) при разрядке током 0,3 *а*.

Дано:

$E = 12$ *в*;
$U_1 = 12{,}5$ *в*;
$I_1 = 3$ *а*;
$\eta_0 = 0{,}7$;
$I_2 = 3$ *а*;
$I_2' = 0{,}3$ *а*.

η — ? η' — ?

Решение

К. п. д. есть отношение полезной работы A_1, совершаемой аккумулятором, к общему количеству энергии A, получаемой им при зарядке, т. е.

$$\eta = \frac{A_1}{A}.$$

Полезная работа, совершенная током при прохождении по внешней цепи в период разрядки батареи за время t_2, в течение которого последняя придет в такое состояние, в каком она была до зарядки, будет

$$A_1 = U_2 I_2 t_2,$$

где U_2 — напряжение на зажимах батареи при разрядке.

Если э. д. с. батареи аккумуляторов равна E, а внутреннее сопротивление r, то

$$U_2 = E - I_2 r.$$

Так как внутреннее сопротивление батареи аккумуляторов при зарядке и разрядке не меняется, то из условия задачи найдем, что

$$r = \frac{U_1 - E}{I_1}.$$

Подставляя значения U_2 и I_2 в выражение для A_1, получим

$$A_1 = \left(E - \frac{U_1 - E}{I_1} I_2\right) I_2 t_2.$$

Работа, совершенная за время t_1 током I_1, посылаемым источником тока, от которого заряжается батарея аккумуляторов, будет равна

$$A = U_1 I_1 t_1.$$

Подставляя значения A_1 и A в выражение для η, получим:

$$\eta = \frac{\left(E - \frac{U_1 - E}{I_1} I_2\right) I_2 t_2}{U_1 I_1 t_1},$$

откуда

$$\eta = \frac{E(I_1 + I_2) - U_1 I_2}{U_1 I_1} \cdot \frac{I_2 t_2}{I_1 t_1}.$$

Так как отношение $\frac{I_2 t_2}{I_1 t_1}$ по условию задачи равно η_0, то

$$\eta = \eta_0 \frac{E(I_1 + I_2) - U_1 I_2}{U_1 I_1}.$$

Подставляя численные значения величин, получим:

$$\eta = 0{,}7 \frac{12\ в \cdot 6\ а - 12{,}5\ в \cdot 0{,}3\ а}{12{,}5\ в \cdot 3\ а} = 0{,}64 \quad (\eta = 64\%);$$

$$\eta' = 0{,}7 \frac{12\ в \cdot 3{,}3\ а - 12{,}5\ в \cdot 0{,}3\ а}{12{,}5\ в \cdot 3\ а} \approx 0{,}67 \quad (\eta' \approx 67\%).$$

176. Из изолированной проволоки сделана замкнутая петля (рис. 89, *а*). В месте перекрещивания расположены одна над другой точки M и N провода. Радиус контура I равен r_1, а контура II — r_2.

а) Определить разность потенциалов между точками M и N, когда этот контур пронизывает магнитное поле, перпендикулярное плоскости рисунка, индукция которого меняется по закону $B = B_0 t$.

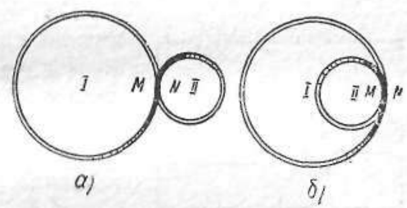


Рис. 89

б) Какова будет разность потенциалов между этими точками, если петля имеет форму, показанную на рис. 89, *б*?

Решение

Обозначим через E_1 и E_2 электродвижущие силы, возникающие в определенный момент времени в контурах I и II, а через R_1

и R_2 — сопротивления этих контуров. Тогда силу тока в петле, изображенной на рис. 89, *а*, можно вычислить по формуле

$$I = \frac{E_1 - E_2}{R_1 + R_2},$$

а разность потенциалов между точками M и N — по формуле

$$U = E_1 - IR_1$$

или по формуле

$$U = E_2 + IR_2.$$

Учитываем первое уравнение, получаем

$$U = \frac{E_1R_2 + E_2R_1}{R_1 + R_2}.$$

Подставляя в эту формулу выражения

$$E_1 = k\frac{\Delta\Phi}{\Delta t} = k\frac{\Delta B\pi r_1^2}{\Delta t} = k\frac{\pi r_1^2 B_0 \Delta t}{\Delta t} = k\pi r_1^2 B_0 \text{ и}$$

$$E_2 = k\pi r_2^2 B_0;\ R_1 = \rho\frac{2\pi r_1}{S};\ R_2 = \rho\frac{2\pi r_2}{S},$$

получаем, что $U = k\pi r_1 r_2 B_0$, где коэффициент k зависит от выбора системы единиц.

Если контур имеет форму, представленную на рис. 89, *б*, то электродвижущие силы E_1 и E_2 складываются. Поэтому

$$I = \frac{E_1 + E_2}{R_1 + R_2};\ U = E_1 - IR_1 = IR_2 - E_2 =$$

$$= \frac{E_1R_2 - E_2R_1}{R_1 + R_2} = k\pi r_1 r_2\, \frac{r_1 - r_2}{r_1 + r_2}\, B_0.$$

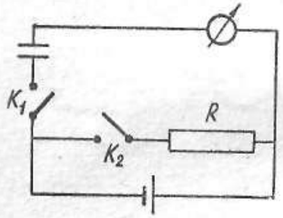


Рис. 90

177. К полюсам батареи с электродвижущей силой E и внутренним сопротивлением r через ключ K_1 и конденсатор емкостью C (рис. 90) присоединен баллистический гальванометр. К зажимам источника ключом K_2 может быть присоединено сопротивление R. При замыкании ключа K_1 (ключ K_2 разомкнут) стрелка гальванометра отклоняется вправо на угол α. На какой угол β и в какую сторону отклонится стрелка гальванометра, если затем замкнуть ключ K_2? (Считать, что угол отклонения пропорционален прошедшему через гальванометр заряду.)

Решение

При замыкании ключа K_1 конденсатор полностью зарядится. При этом через гальванометр пройдет заряд

$$Q_1 = CE = k\alpha.$$

После подключения сопротивления разность потенциалов на зажимах источника упадет до величины

$$U = E\frac{R}{R + r},$$

а заряд конденсатора станет равным

$$Q_2 = CE\frac{R}{R + r}.$$

При этом через гальванометр пройдет заряд

$$Q_1 - Q_2 = CE\frac{r}{R + r} = k\beta.$$

Стрелка гальванометра отклонится влево на угол

$$\beta = \frac{CE}{k}\cdot\frac{r}{R + r} = \alpha\frac{r}{R + r}.$$

178. Внешняя цепь сопротивлением 0,3 *ом* питается от шести аккумуляторов, у каждого из которых электродвижущая сила равна 2 *в*, а внутреннее сопротивление 0,2 *ом*. Аккумуляторы соединяются в отдельные группы последовательно, а группы соединяются друг с другом параллельно. При каком способе соединения аккумуляторов в такие группы будет получена наибольшая величина тока в цепи?

Дано:

$R = 0{,}3$ *ом*;
$E = 2$ *в*;
$r = 0{,}2$ *ом*;
$N = 6$.

m — ?

Решение

Предположим что группа состоит из m элементов, а так как всего N элементов, то получим $k = \frac{N}{m}$ групп. Величина тока при таком соединении будет определяться формулой

$$I = \frac{mE}{\frac{mr}{k} + R} = \frac{E}{\frac{r}{k} + \frac{R}{m}}.$$

Задача сводится к нахождению такого m, при котором I принимает наибольшее значение, или, что то же самое, к нахождению такого m, при котором знаменатель дроби минимален. Добавляя к знаменателю и вычитая из него одну и ту же величину $2\sqrt{\frac{rR}{N}}$, преобразуем его:

$$\frac{r}{k}+\frac{R}{m}=\frac{m}{N}r+\frac{R}{m}=\frac{m}{N}r-2\sqrt{\frac{rR}{N}}+$$
$$+\frac{R}{m}+2\sqrt{\frac{rR}{N}}=\left(\sqrt{\frac{m}{N}r}-\sqrt{\frac{R}{m}}\right)^2+2\sqrt{\frac{rR}{N}}.$$

Отсюда видно, что знаменатель минимален, если

$$\sqrt{\frac{m}{N}r}=\sqrt{\frac{R}{m}}.$$

Из этого условия определяем m:

$$m=\sqrt{N\frac{R}{r}}=3.$$

Таким образом, группа должна состоять из трех аккумуляторов. Число таких групп $k=\frac{N}{m}$ равно 2. Величина тока при этом достигает значения

$$I_{\max}=\frac{E}{2}\sqrt{\frac{N}{rR}}=10a.$$

Интересно отметить, что при таком соединении элементов внутреннее сопротивление батареи $r_{\text{вн}}=\frac{mr}{k}=\frac{m^2r}{N}$ равно внешнему сопротивлению цепи R. Действительно, подставляя в это выражение для $r_{\text{вн}}$ значение $m=\sqrt{\frac{NR}{r}}$, получаем $r_{\text{вн}}=R$.

179. Сколько меди выделится в течение 10 *сек* на катоде при электролизе $CuSO_4$, если в течение первых 5 *сек* величина тока равномерно возрастает от 0 до 3 *а*, а в течение последующих 5 *сек* равномерно уменьшается до 1 *а*?

Дано:

$t=10$ *сек*;
$t_1=5$ *сек*;
$I_1=0$;
$I_2=3$ *а*;
$I_3=1$ *а*;
$t_2=5$ *сек*.

m — ?

Решение

Из рис. 91 видно, что при заданном электрохимическом эквиваленте масса выделившегося вещества на катоде $m=kIt$ полностью определяется произведением It. При постоянном токе произведение It численно равно заштрихованной площади (рис. 91, *а*), если по оси абсцисс отложить время, а по оси ординат — величину тока. Аналогично и при переменном токе произведение It определяется заштрихованной площадью $OABC$ (рис. 91, *б*).

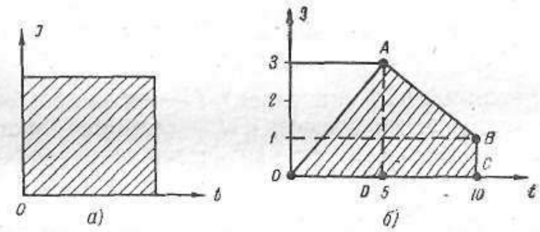


Рис. 91

Площадь

$$OABC=\frac{1}{2}AD\cdot OD+\frac{1}{2}(AD+BC)DC.$$

Но $\frac{1}{2}AD$ и $\frac{1}{2}(AD+BC)$ есть среднее значение тока соответственно первых 5 *сек* и вторых 5 *сек*.

Тогда

$$It=\frac{I_1+I_2}{2}t_1+\frac{I_2+I_3}{2}t_2,$$

$$m=kIt=k\left(\frac{I_1+I_2}{2}t_1+\frac{I_2+I_3}{2}t_2\right).$$

После подстановки численных значений получим

$$m=0{,}33\ \textit{мг/а}\cdot\textit{сек}\left(\frac{1}{2}\cdot3\cdot5+\frac{1}{2}\cdot4\cdot5\right)\textit{а}\cdot\textit{сек}=$$
$$=0{,}33\cdot17{,}5\ \textit{мг}=5{,}8\ \textit{мг}=5{,}8\cdot10^{-6}\ \textit{кг}.$$

180. Электролитическая ванна для получения алюминия рассчитана на 25 000 *а*. Электролиз окиси алюминия производится при рабочем напряжении 4,8 *в* на ванне. Выход по току равен 86%. Сколько алюминия производится за сутки? Каков расход электроэнергии на 1 *кг* алюминия?

Дано:
$I = 25\,000$ *a*;
$U = 4{,}8$ *в*;
$t = 24$ *ч*;
$k = 0{,}09317$ *мг/к* $= 0{,}335$ *г/а·ч*;
$\eta = 0{,}86$.

m — ? γ — ?

Решение

В соответствии с первым законом Фарадея получаем

$$m = kIt,$$

где k — электрохимический эквивалент; t — время прохождения тока; m — масса выделившегося вещества; I — величина тока.

В условии задачи сказано, что фактически выделенное количество алюминия составляет 0,86 от количества алюминия, рассчитанного в соответствии с законом Фарадея, т. е.

$$m = \eta k I t.$$

Таким образом,

$$m = 0{,}86 \cdot 0{,}335\ г/а\cdot ч \cdot 25\,000\ а \cdot 24\ ч \approx 172\,860\ г \approx 173\ кг.$$

Потребляемая электроэнергия

$$A = IUt,$$

$$A = 25\,000\ а \cdot 4{,}8\ в \cdot 24\ ч = 2880\ квт\cdot ч.$$

Расход электроэнергии на 1 *кг* алюминия

$$\gamma = \frac{A}{m} = \frac{2880\ квт\cdot ч}{173\ кг} = 16{,}6\ квт\cdot ч/кг.$$

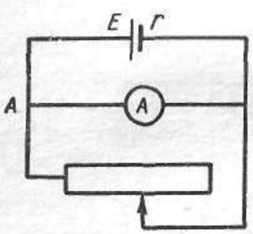


Рис. 92

181. Дана электрическая схема (рис. 92). Будем считать, что ток короткого замыкания небольшой. Как меняется показание амперметра, если уменьшать сопротивление реостата?

Решение

Пусть E — электродвижущая сила, r — внутреннее сопротивление источника тока, R_1 — сопротивление амперметра, R_2 — сопротивление реостата. Тогда ток неразветвленной части цепи по закону Ома для полной цепи будет равен

$$I = \frac{E}{\frac{R_1R_2}{R_1+R_2} + r} = \frac{E\,(R_1+R_2)}{R_1R_2 + r\,(R_1+R_2)}.$$

При перемещении ползунка влево сопротивление реостата уменьшается, а в связи с этим меняется и ток I. Ток I в точке B разветвляется на два тока: I_1 — ток через амперметр, I_2 — ток через реостат. В связи с изменением тока I будут меняться и токи I_1 и I_2. Реостат и амперметр включены параллельно, следовательно,

$$I_1R_1 = I_2R_2,$$

откуда

$$I_1 = \frac{I_2R_2}{R_1}.$$

Но $I_2 = I - I_1$, тогда

$$I_1R_1 = (I - I_1)\,R_2$$

или

$$I_1R_1 = IR_2 - I_1R_2,\quad I_1R_1 + I_1R_2 = IR_2.$$

Тогда

$$I_1 = \frac{IR_2}{R_1+R_2}.$$

Подставляя в это уравнение значение I, найдем

$$I_1 = \frac{E\,(R_1+R_2)\,R_2}{[R_1R_2 + r\,(R_1+R_2)]\,(R_1+R_2)} = \frac{ER_2}{R_1R_2 + rR_1 + rR_2}.$$

Разделив числитель и знаменатель на R_2, получим

$$I_1 = \frac{E}{R_1 + r + \frac{rR_1}{R_2}}.$$

Величины E, R_1 и r постоянные, а меняется только R_2. При уменьшении R_2 величина дроби $\frac{rR_1}{R_2}$ увеличивается и знаменатель $r + R_1 + r\frac{R_1}{R_2}$ тоже увеличивается, следовательно, величина дроби $\frac{E}{r + R_1 + r\frac{R_1}{R_2}}$ уменьшается. Отсюда делаем вывод, что при уменьшении сопротивления реостата показание амперметра будет уменьшаться.

182. Какого сечения надо взять медный провод для устройства линии от электростанции до потребителя общей длиной 1 *км*, чтобы передать потребителю мощность 8 *квт*? Напряжение на шинах станции 130 *в*, допустимая потеря на линии передачи 8%.

Дано:

$l = 1$ *км* $= 1000$ *м*;
$N = 8$ *квт* $= 8000$ *вт*;
$U_0 = 130$ *в*;
$k = 0{,}08$;
$\rho = 0{,}017$ *ом·мм²/м* $= 1{,}7 \cdot 10^{-8}$ *ом·м*.

S — ?

Решение

Потеря напряжения на линии передачи будет $U_{лин} = U_0 k$. Эта же потеря напряжения на линии через сопротивление линии выразится так:

$$U_{лин} = IR_{пров} = I\rho \frac{l}{S}.$$

Следовательно,

$$U_0 k = I\rho \frac{l}{S}.$$

Откуда

$$I = \frac{U_0 k}{\rho l} S.$$

Напряжение потребителя равно

$$U_1 = U_0 - U_0 k = U_0 (1 - k).$$

То же напряжение потребителя через мощность N и ток I будет равно

$$U_1 = \frac{N}{I} = U_0 (1 - k),$$

откуда

$$I = \frac{N}{U_0 (1 - k)}.$$

Но

$$I = \frac{U_0 k}{\rho l} S,$$

тогда

$$\frac{U_0 k}{\rho l} S = \frac{N}{U_0 (1 - k)}$$

откуда

$$S = \frac{N \rho l}{U_0^2 k (1 - k)}.$$

После подстановки численных значений получим

$$S = \frac{8000 \text{ вт} \cdot 1{,}7 \cdot 10^{-8} \text{ ом} \cdot \text{м} \cdot 1000 \text{ м}}{130 \text{ в} \cdot 130 \text{ в} \cdot 0{,}08 \cdot 0{,}92} = 1{,}09 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2 = 109 \text{ мм}^2.$$

183. Реакция соединения водорода с кислородом протекает по следующему уравнению:

$$2H_2 + O_2 = 2H_2O + 570\,830 \text{ дж}.$$

При каком наименьшем напряжении на электродах может происходить электролиз воды?

Решение

При величине тока I и напряжении U на выделение m граммов вещества на катоде при электролизе необходимо затратить энергию

$$A = IUt.$$

Подставляя вместо I его значение, согласно первому закону электролиза, получим

$$A = \frac{m}{kt} Ut = U \frac{m}{k};$$

если электрохимический эквивалент выразить через атомный вес и валентность вещества, то

$$A = U \frac{mn}{a} F.$$

Откуда искомое напряжение на электродах будет равно

$$U = \frac{Aa}{mnF}.$$

Из уравнения соединения водорода с кислородом видно, что на разложение 2 молей воды при выделении из нее 4 *г* водорода необходимо израсходовать 570 830 *дж* энергии.

Подставляя данные значения, получим

$$U = \frac{570\,830 \text{ в} \cdot \text{а} \cdot \text{сек} \cdot 1 \text{ г/г-экв}}{4 \text{ г} \cdot 1 \cdot 96\,500 \text{ а} \cdot \text{сек/г-экв}} = 1{,}47 \text{ в}.$$

184. Ток величиной 1 *а* пропускается в течение 1 *мин* через подкисленную воду. Какой объем займет образовавшийся при этом гремучий газ при нормальных условиях?

Дано:

$I = 1$ *а*;
$t = 1$ *мин* $= 60$ *сек*.

V — ?

Решение

Объем гремучего газа будет равен сумме объемов водорода V_H и кислорода V_O, выделившихся при электролизе подкисленной воды:

$$V = V_H + V_O.$$

Объем выделившегося водорода найдем, разделив его массу на плотность:

$$V_H = \frac{m_H}{\rho_H}.$$

Так как

$$\rho_H = \frac{\mu_H}{V_\mu},$$

то

$$V_H = \frac{m_H}{\mu_H} V_\mu,$$

где μ_H — масса 1 грамм-молекулы водорода; V_μ — объем 1 грамм-молекулы газа при нормальных условиях.

Массу водорода, выделившегося при электролизе, определим по закону Фарадея:

$$m_H = \frac{a_H It}{Fn_H},$$

где a_H — атомный вес; n_H — валентность водорода; I — величина тока, проходящего через электролит; t — время, в течение которого пропускался ток; F — число Фарадея.

Масса кислорода, выделившегося при электролизе, определяется аналогично

$$m_O = \frac{a_O It}{Fn_O}.$$

Подставляя вместо V_H и V_O их значения, получим

$$V = \frac{ItV_\mu}{F}\left(\frac{a_H}{n_H\mu_H} + \frac{a_O}{n_O\mu_O}\right).$$

Находим (см. прил. II, 1, 26) следующие величины: $V_\mu = 2{,}24 \cdot 10^{-2}$ *м³/моль*; $F = 9{,}65 \cdot 10^4$ *к*; $a_H = 0{,}001$ *кг/моль*; $a_O = 0{,}016$ *кг/моль*; $n_{H1} = 1$; $n_O = 2$; $\mu_H = 0{,}002$ *кг/моль*; $\mu_O = 0{,}032$ *кг/моль*.

После подстановки численных значений получим

$$V = \frac{1 \cdot 60 \cdot 2{,}24 \cdot 10^{-2}}{9{,}65 \cdot 10^4}\left(\frac{0{,}001}{1 \cdot 0{,}002} + \frac{0{,}016}{2 \cdot 0{,}032}\right) \approx 10^{-5} \text{ м}^3.$$

ПЕРЕМЕННЫЙ ТОК, ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ КОЛЕБАНИЯ И ВОЛНЫ

185. Дуга Петрова питается переменным током 50 периодов величиной 30 *а*. Сопротивление горящей дуги 1,5 *ом*. Эффективное напряжение в цепи равно 110 *в*. Какую самоиндукцию нужно включить последовательно с дугой, чтобы получить нужный ток?

Дано:

$I_{эф} = 30$ *а*;
$R = 1{,}5$ *ом*;
$\nu = 50$ *гц*;
$E_{эф} = 110$ *в*.

L — ?

Решение

Включение самоиндукции в цепь переменного тока увеличивает сопротивление. Сопротивление цепи Z с последовательно включенным активным сопротивлением R и самоиндукцией L определяется следующей формулой:

$$Z = \sqrt{R^2 + L^2\omega^2}.$$

Соотношение между эффективной величиной тока и эффективным напряжением для цепи с индуктивностью следующее:

$$I_{эф} = \frac{E_{эф}}{\sqrt{R^2 + L^2\omega^2}}.$$

Решим это уравнение относительно L:

$$L = \frac{1}{I_{эф}\omega}\sqrt{E_{эф}^2 - I_{эф}^2 R^2}.$$

Вместо ω подставим ее выражение через ν:

$$\omega = 2\pi\nu.$$

Тогда

$$L = \frac{1}{I_{эф} \cdot 2\pi\nu}\sqrt{E_{эф}^2 - I_{эф}^2 R^2}.$$

После подстановки численных значений получим

$$L = \frac{1}{30 \cdot 2 \cdot 3{,}14 \cdot 50}\sqrt{110^2 - 30^2 \cdot 1{,}5^2} \approx 0{,}01 \text{ гн}.$$

186. К медному вольтаметру с внутренним сопротивлением 60 *ом* подсоединен источник постоянного тока с электродвижущей силой 120 *в* и источник переменного тока с электродвижущей силой $E_2 = 60\sqrt{2}\sin 2\pi\nu t$. Определить количество меди, выделившейся в вольтаметре за 10 *мин*. Сколько теплоты выделится в вольтаметре за это время?

Дано:

$R = 60$ *ом*;
$E_1 = 120$ *в*;
$E_2 = 60\sqrt{2}\sin 2\pi\nu t$;
$t = 10$ *мин* $= 600$ *сек*;
$k = 0{,}33 \cdot 10^{-6}$ *кг/к*.

m — ? Q — ?

Решение

Ток, протекающий через вольтаметр,

$$I = \frac{E_1 + E_2}{R} = I_1 + I_2,$$

где I_1 — величина постоянного тока, численно равная $\frac{E_1}{R} = 2a$; I_2 — величина переменного тока, равная $\sqrt{2}\sin 2\pi\nu t$, т. е. $I_2 = I_0 \sin 2\pi\nu t$.

Постоянная составляющая тока на отрицательном электроде вольтаметра выделяет количество меди

$$m = kI_1t = 0{,}33 \cdot 10^{-6}\ кг/к \cdot 2\ a \cdot 600\ сек \approx 4 \cdot 10^{-2}\ кг.$$

Переменная составляющая тока на электроде не выделяет медь.

Теплота, выделяющаяся в вольтаметре, определяется как постоянной, так и переменной составляющими тока:

$$Q = (I_1^2 + I_{2\,эф}^2)\,Rt,$$

где $I_{2\,эф}$ — эффективное значение переменного тока, численно равное $\frac{I_0}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 1$.

Тогда

$$Q = (4\ a^2 + 1\ a^2) \cdot 60\ ом \cdot 600\ сек = 180\,000\ дж = 180\ кдж.$$

187. Катушка, индуктивность которой $2 \cdot 10^{-3}$ *гн*, присоединена к плоскому воздушному конденсатору с площадью пластин 100 *см*². Найти расстояние между пластинами конденсатора, если контур резонирует на волну длиной 100 *м*.

Дано:

$L = 2 \cdot 10^{-3}$ *гн*;
$S = 100$ *см*$^2 = 10^{-2}$ *м*^{2};
$\lambda = 100$ *м*;
$\varepsilon = 1$.

d — ?

Решение

Период T электромагнитных колебаний в контуре, состоящем из емкости C и индуктивности L, определяется формулой

$$T = 2\pi\sqrt{LC}.$$

С другой стороны, период колебания

$$T = \frac{\lambda}{c},$$

где c — скорость распространения электромагнитных волн. Емкость плоского конденсатора

$$C = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 S}{d},$$

где S — площадь одной из пластин конденсатора; d — расстояние между пластинами; ε_0 — диэлектрическая проницаемость вакуума, равная $8{,}85 \cdot 10^{-12}$ *ф/м*; ε — диэлектрическая проницаемость среды.

Подставим в формулу для периода колебаний значения соответствующих физических величин

$$\frac{\lambda}{c} = 2\pi\sqrt{L\frac{\varepsilon\varepsilon_0 S}{d}},$$

откуда

$$d = \frac{4\pi^2\varepsilon\varepsilon_0 LSc^2}{\lambda^2},$$

$$d = \frac{4 \cdot 3{,}14^2 \cdot 8{,}85 \cdot 10^{-12}\ ф/м \cdot 2 \cdot 10^{-3}\ гн \cdot 10^{-2}\ м^2 \cdot 9 \cdot 10^{16}\ м^2/сек^2}{10^4\ м^2} \approx 6{,}3 \cdot 10^{-2}\ м.$$

188. Какую необходимо взять емкость в колебательном контуре, чтобы при индуктивности 250 *мгн* можно было бы настроить его на звуковую частоту 500 *гц*? Сопротивление контура принять равным нулю.

Дано:

$L = 250$ *мгн* $= 0{,}25$ *гн*;
$\nu = 500$ *гц*.

C — ?

Решение

Из формулы периода колебания контура

$$T = 2\pi\sqrt{LC}$$

определим емкость

$$C = \frac{T^2}{4\pi^2 L}.$$

Но $T = \frac{1}{\nu}$, тогда

$$C = \frac{1}{4\pi^2 L\nu^2},$$

$$C = \frac{1}{4\cdot 3{,}14^2\cdot 0{,}25\ \textit{гн}\cdot 25\cdot 10^4\ \textit{гц}^2} \approx 0{,}4\cdot 10^{-6}\ \textit{ф}.$$

189. На какую волну настроен радиоприемник, если его контур имеет индуктивность 1,5 *мгн* и емкость $6\cdot 10^{-3}$ *мкф*?

Дано:

$L = 1{,}5\ \textit{мгн} = 1{,}5\cdot 10^{-3}\ \textit{гн};$
$C = 6\cdot 10^{-3}\ \textit{мкф} = 6\cdot 10^{-9}\ \textit{ф}.$

$\lambda - ?$

Решение

Между длиной волны, излучаемой колебательным контуром, и периодом его колебаний существует связь

$$\lambda = cT,$$

где c — скорость распространения электромагнитной волны.

Так как период колебаний $T = 2\pi\sqrt{LC}$, то $\lambda = 2\pi c\sqrt{LC}$, $\lambda = 2\cdot 3{,}14\cdot 3\cdot 10^8\ \textit{м/сек}\sqrt{1{,}5\cdot 10^{-3}\ \textit{гн}\cdot 6\cdot 10^{-9}\ \textit{ф}} \approx 5650\ \textit{м}.$

190. Катушка, индуктивность которой $3\cdot 10^{-5}$ *гн*, присоединена к плоскому конденсатору с площадью пластин 100 $\textit{см}^2$. Расстояние между пластинами 0,1 *мм*. Чему равна диэлектрическая проницаемость среды между пластинами конденсатора, если контур резонирует на волну длиной 750 *м*?

Дано:

$L = 3\cdot 10^{-5}\ \textit{гн};$
$S = 100\ \textit{см}^2 = 10^{-2}\ \textit{м}^2;$
$d = 0{,}1\ \textit{мм} = 10^{-4}\ \textit{м};$
$\lambda = 750\ \textit{м}.$

$\varepsilon - ?$

Решение

Длина волны

$$\lambda = cT = c\cdot 2\pi\sqrt{LC},$$

где c — скорость распространения электромагнитных волн.

Емкость плоского конденсатора

$$C = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 S}{d}.$$

Тогда

$$\lambda = 2\pi c\sqrt{\frac{\varepsilon\varepsilon_0 LS}{d}},$$

откуда

$$\varepsilon = \frac{\lambda^2 d}{4\pi^2 c^2 \varepsilon_0 LS}.$$

После подстановки численных значений

$$\varepsilon = \frac{750^2\ \textit{м}^2\cdot 10^{-4}\ \textit{м}}{4\cdot 3{,}14^2\cdot 9\cdot 10^{16}\ \textit{м}^2/\textit{сек}^2\cdot 8{,}85\cdot 10^{-12}\textit{ф/м}\cdot 3\cdot 10^{-5}\ \textit{гн}\cdot 10^{-2}\ \textit{м}^2} \approx 6.$$

ГЛАВА IV

ОПТИКА

ОТРАЖЕНИЕ И ПРЕЛОМЛЕНИЕ СВЕТА

191. Определить угол φ между падающим лучом AO_1 и отраженным лучом O_2B, если отражение произошло дважды от двух плоских зеркал. Угол между зеркалами 60° (рис. 93). Плоскость лучей перпендикулярна линии пересечения плоскостей зеркал.

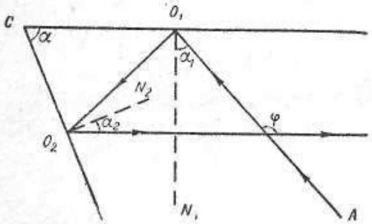


Рис. 93

Дано:

$\alpha = 60°$.

φ — ?

Решение

Обозначим угол падения луча AO_1 через α_1, угол отражения луча O_2B через α_2. Так как угол падения равен углу отражения, то $\angle AO_1O_2 = 2\alpha_1$, $\angle O_1O_2B = 2\alpha_2$. Искомый угол φ, как внешний угол треугольника, равен

$$\varphi = 2\alpha_1 + 2\alpha_2.$$

Очевидно, что

$$\alpha_1 = 90° - \angle CO_1O_2,$$
$$\alpha_2 = 90° - \angle CO_2O_1,$$

откуда

$$\alpha_1 + \alpha_2 = 180° - (\angle CO_1O_2 + \angle CO_2O_1).$$

В треугольнике CO_1O_2

$$\alpha = 180° - (\angle CO_1O_2 + \angle CO_2O_1).$$

Сравнивая два последних уравнения, находим

$$\alpha = \alpha_1 + \alpha_2.$$

Тогда

$$\varphi = 2\ (\alpha_1 + \alpha_2) = 2\alpha = 120°.$$

192. В призме с преломляющим углом 30° (рис. 94) боковая грань AC посеребрена. Луч света падает на грань AB под углом 45° и после отражения от посеребренной грани выходит по тому же направлению. Определить показатель преломления призмы.

Дано:

$A = 30°$;
$\alpha = 45°$.

n — ?

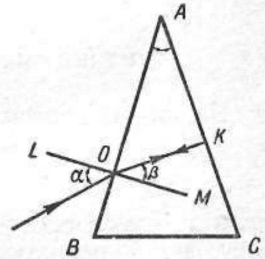


Рис. 94

Решение

Луч света после отражения от грани AC пойдет по тому же направлению, если угол OKA равен 90°. Тогда угол преломления β равен преломляющему углу призмы A. Откуда

$$n = \frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \frac{\sin 45°}{\sin 30°} = 1{,}41.$$

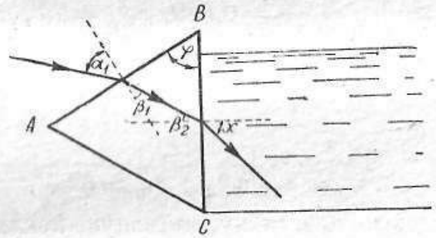


Рис. 95

193. Равнобочная призма прилегает одной гранью к сосуду с водой (рис. 95). Луч света падает из воздуха на грань призмы под углом 40° и после двукратного преломления входит в воду. Показатель преломления призмы $n_1 = 1{,}609$. Чему равен угол преломления света в воде? Под каким углом нужно направить луч света на грань призмы, чтобы он не проник в воду?

Дано:

$\alpha_1 = 40°$;
$\varphi = 60°$;
$n_1 = 1{,}609$;
$n_2 = 1{,}334$.

x — ? $\alpha_{гр}$ — ?

Решение

Из закона преломления $n_1 = \frac{\sin \alpha_1}{\sin \beta_1}$ находим угол преломления $\beta_1 = 23°30'$. На плоскость BC луч света падает под углом

$$\beta_2 = \varphi - \beta_1 = 36°30'.$$

Если x — угол преломления света при прохождении из стекла в воду, а n_2 — показатель преломления воды, то

$$\frac{\sin \beta_2}{\sin x} = \frac{n_2}{n_1},$$

откуда

$$\sin x = \frac{n_1}{n_2} \sin \beta_2, \quad \sin x = \frac{1{,}609}{1{,}334} \cdot 0{,}595 = 0{,}716; \quad x = 46°$$

Луч света не попадет в воду, если $x = 90°$.

$$\sin \beta_{2гр} = \frac{n_2}{n_1} = 0{,}829; \quad \beta_{2гр} = 56°,$$

откуда $\beta_{1гр} = 60° - 56° = 4°$.

Но $\frac{\sin \alpha_{гр}}{\sin \beta_{1гр}} = n_1$.

Поэтому

$$\sin \alpha_{гр} = n_1 \sin \beta_{1гр}; \quad \alpha_{гр} \approx 6°30'.$$

194. На кварцевую пластинку, имеющую показатель преломления 1,54, падает световой луч. Чему равен угол падения, если отраженный и преломленный лучи взаимно перпендикулярны?

Дано:

$n = 1{,}54$.

α — ?

Решение

По закону преломления

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = n \text{ (рис. 96)}.$$

Так как $\alpha + \beta = 90°$, то

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{\sin \alpha}{\sin (90° - \alpha)} = \operatorname{tg} \alpha.$$

$$\operatorname{tg} \alpha = n; \quad \alpha \approx 57°.$$

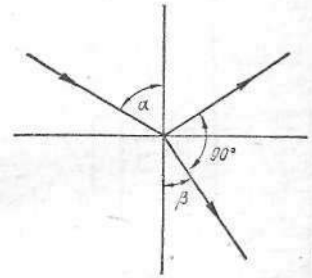


Рис. 96

195. Определить боковое смещение луча после прохождения через плоскопараллельную стеклянную пластинку толщиной 6 *см*, имеющую показатель преломления 1,6. Угол падения луча света на пластинку 40°.

Дано:

$h = 6$ *см*;
$\alpha = 40°$;
$n = 1{,}6$.

d — ?

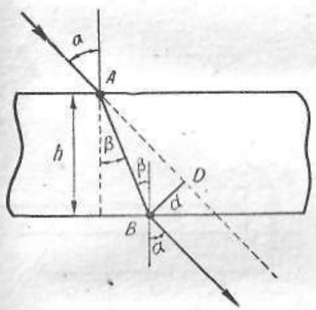


Рис. 97

Решение

Расстояние между лучами найдем из треугольника ABD (рис. 97):

$$d = AB \sin (\alpha - \beta),$$

где $AB = \frac{h}{\cos \beta}$ (h — толщина пластинки, β — угол преломления). Окончательно имеем

$$d = h \frac{\sin (\alpha - \beta)}{\cos \beta}.$$

Угол преломления β определим из выражения $\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = n$:

$$\sin \beta = \frac{\sin \alpha}{n}, \quad \sin \beta = \frac{0{,}643}{1{,}6} = 0{,}402; \quad \beta = 23°40'.$$

Зная угол преломления β, можно определить смещение луча:

$$d = \frac{6\ см \cdot 0{,}2812}{0{,}9159} \approx 1{,}84\ см.$$

196. На дне стакана, заполненного водой на 10 *см*, лежит монета. На каком расстоянии от поверхности видит ее глаз наблюдателя? Показатель преломления воды 1,33.

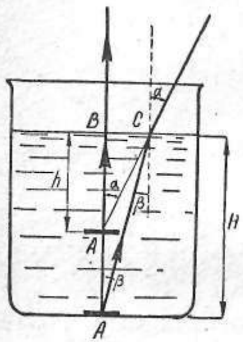


Рис. 98

Дано:

$H = 10\ см = 0{,}1\ м;$
$n = 1{,}33.$

$h - ?$

Решение

На рис. 98 показаны два луча, исходящие от монеты и попадающие в глаз наблюдателя. Искомое расстояние

$$h = \frac{BC}{\operatorname{tg} \alpha}.$$

Так как $BC = H \operatorname{tg} \beta$, то $h = H\,\frac{\operatorname{tg} \beta}{\operatorname{tg} \alpha}$.

При малых углах падения и преломления

$$\frac{\operatorname{tg} \beta}{\operatorname{tg} \alpha} \approx \frac{\sin \beta}{\sin \alpha} = \frac{1}{n}.$$

Тогда $h = \frac{H}{n} = \frac{10}{1{,}33} \approx 7{,}5\ см.$

197. На какой глубине под водой находится водолаз (рис. 99), если он видит отраженными от поверхности воды те части горизонтального дна, которые расположены от него на расстоянии 15 *м* и больше? Рост водолаза 1,7 *м*. Показатель преломления воды 1,33.

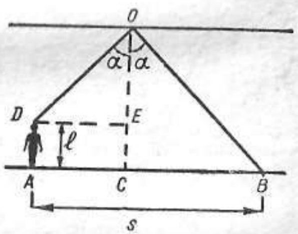


Рис. 99

Дано:

$s = 15\ м;$
$l = 1{,}7\ м;$
$n = 1{,}33.$

$h - ?$

Решение

Лучи света, идущие от освещенных предметов, находящихся на дне, попадая на поверхность воды, полностью отражаются и попадают в глаз наблюдателя, если угол падения равен углу полного внутреннего отражения или больше его:

$$\frac{\sin \alpha}{\sin 90^\circ} = \frac{1}{n} \quad \text{или} \quad \sin \alpha = \frac{1}{n}.$$

Расстояние AB равно расстоянию от водолаза до ближайших к нему предметов, которые он видит отраженными от поверхности воды. Как видно из рисунка,

$$AC = DE = (h - l) \operatorname{tg} \alpha, \quad \text{где} \quad h = CO,$$
$$s - AC = h \operatorname{tg} \alpha.$$

Решая совместно систему двух уравнений, находим искомую глубину

$$h = \frac{l}{2} + \frac{s}{2} \cdot \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha},$$

где

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{1}{\sqrt{n^2 - 1}}.$$

Подставляя вместо $\operatorname{tg} \alpha$ его значение, находим

$$h = \frac{l}{2} + \frac{s}{2}\sqrt{n^2 - 1}.$$

После подстановки численных значений получим $h = 7{,}4\ м.$

198. На дне сосуда находится небольшой предмет, прикрытый сверху воронкой с углом при вершине 2φ, которая плотно прилегает ко дну сосуда (рис. 100). Сосуд наполнен жидкостью с показателем преломления n. При каких условиях предмет будет виден?

Решение

Пусть из точки C предмета выходит луч, который падает на воронку под углом α. Этот луч после преломления войдет в жидкость под углом β к воронке. Он упадет на поверхность жидкости под углом γ и после преломления выйдет в воздух под углом δ. По закону преломления

$$\sin \alpha = n \sin \beta,$$
$$\sin \delta = n \sin \gamma.$$

Предмет будет виден в том случае, если не произойдет полного внутреннего отражения от поверхности жидкости. Условие видимости предмета выражается следующим образом: $\delta \leqslant 90°$. Тогда

$$\sin \gamma_{гр} = \frac{1}{n}.$$

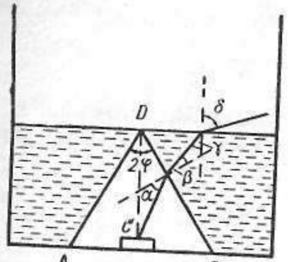


Рис. 100

Так как угол

$$\beta = \frac{\pi}{2} - \varphi - \gamma,$$

то

$$\sin \beta = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \varphi - \gamma\right) = \cos(\varphi + \gamma) =$$
$$= \cos\varphi \cos\gamma - \sin\varphi \sin\gamma.$$

Тогда граничное условие для α запишется следующим образом:

$$\sin \alpha_{гр} = n(\cos\varphi \cos\gamma_{гр} - \sin\varphi \sin\gamma_{гр})$$

или

$$\sin \alpha_{гр} = n\left(\cos\varphi \sqrt{1 - \frac{1}{n^2}} - \sin\varphi \cdot \frac{1}{n}\right).$$

После небольших преобразований получим

$$\sin \alpha_{гр} = \sqrt{n^2 - 1}\cos\varphi - \sin\varphi.$$

Так как даже вертикальному лучу CD соответствует угол падения на боковую поверхность, равный $\frac{\pi}{2} - \varphi$, то

$$\alpha_{гр} = \frac{\pi}{2} - \varphi.$$

Тогда

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) = \sqrt{n^2 - 1}\cos\varphi - \sin\varphi$$

или

$$\operatorname{tg}\varphi_{гр} = \sqrt{n^2 - 1} - 1.$$

Тогда условие видимости предмета может быть записано в виде

$$\operatorname{tg}\varphi \geqslant \sqrt{n^2 - 1} - 1.$$

Для углов больших, чем $\varphi_{гр}$, предмет будет виден, для меньших — невидим.

199. Тонкий стеклянный стакан оклеен бумагой, в которой прорезана узкая вертикальная щель. Стакан наполнен наполовину водой. Перед щелью поставлен источник света S (рис. 101). Изображение щели на противоположной стенке стакана получается в точке B. Затем стакан поворачивают вокруг вертикальной оси

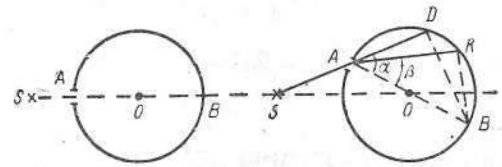


Рис. 101

на некоторый угол. Определить скорость света v в воде по положению изображений щели, если скорость света в вакууме равна 300 000 *км/сек*.

Решение

После поворота стакана на некоторый угол луч света, исходящий от источника S, проходит в стакане над поверхностью воды по направлению SAD. Точка D — изображение щели на стакане над поверхностью воды. Луч света, проходящий внутри стакана через слой жидкости, преломляется и дает изображение щели в точке K.

Из рисунка видно, что угол α является углом падения, угол β — углом преломления. На основании закона преломления

$$n = \frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \frac{c}{v}.$$

Из $\triangle BAD$ следует

$$BD = AB \cdot \sin\alpha = 2r\sin\alpha,$$

откуда

$$\sin\alpha = \frac{BD}{2r}.$$

Из прямоугольного треугольника BAK получаем

$$\sin\beta = \frac{BK}{2r}.$$

Тогда

$$n = \frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \frac{BD}{2r} \cdot \frac{2r}{BK} = \frac{BD}{BK},$$

откуда

$$\frac{c}{v} = \frac{BD}{BK} \text{ и } v = c\frac{BK}{BD}.$$

Определение скорости света в воде сводится к определению расстояний BK и BD, т. е. смещений изображений щели по сравнению с первоначальным положением.

Эксперимент дает

$$\frac{BD}{BK} = 1{,}33,$$

откуда

$$v = \frac{c}{1{,}33} = 225\,563 \text{ км/сек}.$$

ЛИНЗЫ. ОПТИЧЕСКИЕ ПРИБОРЫ

200. Объектив фотоаппарата «Зенит-С» имеет фокусное расстояние 5 *см*. С какого расстояния сделан снимок дома высотой 6 *м*, если высота негатива 24 *мм*?

Дано:

$OE = F = 5$ *см* $= 0{,}05$ *м*;

$AB = 6$ *м*;

$A_1B_1 = 24$ *мм* $= 0{,}024$ *м*.

d — ?

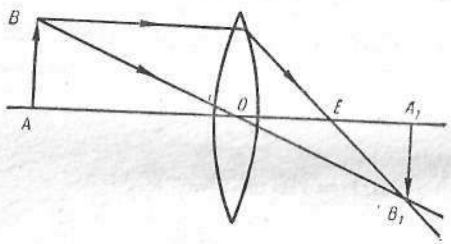


Рис. 102

Решение

Как видно из рис. 102, изображение в фотоаппарате получается действительное, обратное и уменьшенное, если предмет находится за двойным фокусным расстоянием объектива. Известно, что линейное увеличение линзы составляет

$$k = \frac{A_1B_1}{AB} = \frac{f}{d}.$$

Отношение $\frac{f}{d}$ можно получить и из формулы линзы

$$\frac{1}{F} = \frac{1}{f} + \frac{1}{d} \text{ и } \frac{f}{d} = \frac{f - F}{F}.$$

Таким образом,

$$\frac{f-F}{F} = k \text{ или } k \cdot F = f - F;\ f = F(k+1).$$

Чтобы определить расстояние d от предмета до объектива фотоаппарата, используем формулу линейного увеличения линзы. Получим

$$d = \frac{f}{k} = \frac{F(k+1)}{k},$$

но

$$k = \frac{A_1B_1}{AB} = \frac{0{,}024}{6} = 0{,}004.$$

Тогда

$$d = \frac{0{,}05\,(0{,}004 + 1)}{0{,}004} = 12{,}55 \text{ м}.$$

Примечание. Рассматривая задачи подобного типа, необходимо прежде всего построить изображение в линзе. Само решение задачи можно свести к нахождению искомых величин, применяя известные формулы или рассматривая подобие треугольников.

201. Предмет находится на расстоянии 6 *см* от собирающей линзы. Какое линейное увеличение дает линза, если ее главное фокусное расстояние 8 *см*?

Дано:

$d = 6$ *см* $= 0{,}06$ *м*;

$F = 8$ *см* $= 0{,}08$ *м*.

k — ?

Решение

Линейное увеличение определяется формулой

$$k = \frac{f}{d}.$$

Расстояние от изображения до линзы f можно найти из формулы линзы

$$\frac{1}{d} + \frac{1}{f} = \frac{1}{F};\ f = \frac{dF}{d-F}.$$

Определим линейное увеличение

$$k = \frac{F}{d - F}, \; k = \frac{0{,}08}{0{,}08 - 0{,}06} = 4.$$

Изображение получится мнимое и увеличенное в 4 раза.

202. На каком расстоянии расположен предмет перед линзой, если его изображение находится на расстоянии наилучшего видения в 25 *см* от оптического центра лупы O, а фокусное расстояние лупы равно 5 *см*?

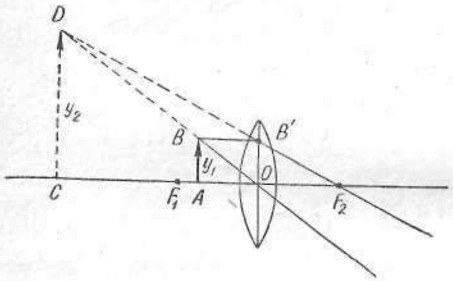


Рис. 103

Дано:

$d = 25$ *см*;
$F = 5$ *см*.

x — ?

Решение

Пусть предмет AB высотой y_1 находится на расстоянии $OA = x$ от оптического центра O. Построим его изображение $CD = y_2$ (рис. 103). F_1 и F_2 — фокусы лупы, CO — расстояние наилучшего видения d, CD — изображение предмета, высоту которого обозначим через y_2, и $OF_1 = OF_2 = F$ — фокусное расстояние лупы.

Из подобия треугольников $OB'F_2$ и CDF_2 найдем

$$\frac{CD}{OB'} = \frac{CD}{AB} = \frac{CO + OF_2}{OF_2}$$

или

$$\frac{y_2}{y_1} = \frac{d + F}{F}.$$

С другой стороны, рассматривая подобные треугольники OAB и OCD, найдем, что

$$\frac{y_2}{y_1} = \frac{d}{x}.$$

Приравнивая правые части последних двух выражений, получим

$$\frac{d}{x} = \frac{d + F}{F},$$

откуда искомое расстояние $x = \frac{dF}{d + F}$,

$$x = \frac{25 \cdot 5}{30} \; см \approx 4{,}2 \; см.$$

203. На расстоянии 30 *см* от центра двояковыпуклой линзы, равном фокусному расстоянию, перпендикулярно оптической оси помещено плоское зеркало. С другой стороны линзы на расстоянии 45 *см* находится предмет. Где получится изображение предмета?

Дано:

$F = 30$ *см* $= 0{,}3$ *м*;
$d = 45$ *см* $= 0{,}45$ *м*.

f — ?

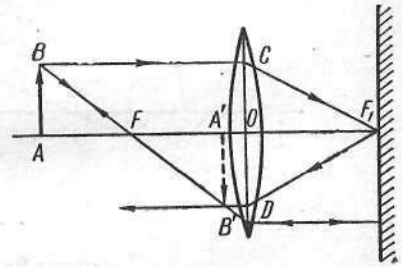


Рис. 104

Решение

Построим ход лучей в линзе при наличии зеркала (рис. 104). Из рисунка видно, что $OC = OD$ и $OC = AB$.

Следствием этого является то, что $AB = A'B'$.

Очевидно, что

$$f = A'O = FO - FA' = OA - (AF + FA') = OA - 2AF.$$

Так как $AF = OA - OF$, то

$$f = OA - 2(OA - OF) = 2OF - OA.$$

Подставляя значения, получим

$$f = 0{,}6 \; м - 0{,}45 \; м = 0{,}15 \; м.$$

204. На расстоянии 15 *см* от двояковыпуклой линзы с фокусным расстоянием 30 *см* помещена свеча. За линзой на расстоянии 15 *см* находится плоское зеркало. Где получится изображение свечи?

Дано:

$d = 15$ *см* $= 0{,}15$ *м*;
$F = 30$ *см* $= 0{,}3$ *м*;
$l = 15$ *см* $= 0{,}15$ *м*.

f — ?

Решение

Построим изображение свечи AB в линзе (рис. 105) с учетом отражения от плоского зеркала.

Луч AC, продолжение которого проходит через фокус F_1, преломившись через линзу, пойдет параллельно главной оптической оси и, отразившись от зеркала, вернется снова по тому же направлению.

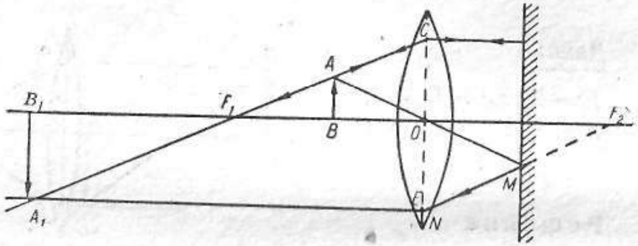


Рис. 105

Луч AO, проходящий через центр линзы, после отражения от зеркала падает на линзу под некоторым углом Продолжение этого луча пересечет главную оптическую ось в точке F_2. Легко показать, что эта точка является вторым фокусом линзы. Отсюда следует, что отраженный от зеркала луч MN после преломления через линзу пойдет параллельно главной оптической оси.

Из подобия треугольника A_1CE и F_1CO получаем

$$\frac{A_1E}{F_1O} = \frac{CE}{CO}, \quad \frac{f}{F} = \frac{CE}{CO}.$$

Так как $CE = 2CO$, то $f = 2F = 0{,}6$ *м*.

Данная задача допускает несколько решений. Предлагаем читателям решить эту задачу другими методами

205 Двояковыпуклая линза дает изображение на экране предмета. Между линзой и экраном помещена плоскопараллельная пластинка толщиной 3 *см* с показателем преломления 1,5. В каком направлении и на сколько нужно сдвинуть экран, чтобы получить отчетливое изображение предмета?

Дано:

$d = 3$ *см* $= 0{,}03$ *м*;

$n = 1{,}5$.

x — ?

Решение

Найдем изображения A_1B_1 и A_2B_2 предмета AB, построив ход лучей в первом и во втором случаях (рис. 106). Так как при прохождении через плоскопараллельную пластинку выходящий луч параллелен падающему, то

$$x = A_1A_2 = CE - DE.$$

Если угол падения луча на пластинку равен α, а угол преломления — β ($\angle KCE$), то из $\triangle DEK$ следует:

$$EK = DE \operatorname{tg} \alpha.$$

Из $\triangle CEK$

$$EK = CE \operatorname{tg} \beta,$$

откуда

$$\frac{DE}{CE} = \frac{\operatorname{tg} \beta}{\operatorname{tg} \alpha}.$$

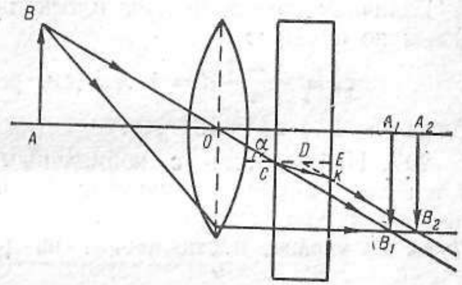


Рис. 106

Для малых углов α и β отношение тангенсов можно заменить отношением синусов. Тогда

$$DE = CE \frac{\sin \beta}{\sin \alpha} = CE \cdot \frac{1}{n}.$$

Подставляя вместо DE его значение в первоначальную формулу, получим

$$x = A_1A_2 = CE - \frac{1}{n} CE = d \frac{n-1}{n}.$$

После подстановки численных значений найдем

$$x = 0{,}01 \text{ м}.$$

206. В зрительной трубе расстояние между объективом и окуляром составляет 180 *мм*. В это пространство понадобилось установить сетку (плоскопараллельную пластинку) из стекла толщиной 3 *мм* с показателем преломления 1,5. Определить новое расстояние между объективом и окуляром, которое сохраняет то же состояние юстировки оптической системы, что и до введения сетки.

Дано:

$d = 3$ *мм*;
$n = 1{,}5$;
$l_0 = 180$ *мм*.
l — ?

Решение

Величину смещения луча плоскопараллельной пластинкой определим по формуле

$$\Delta l = \frac{n-1}{n} d = 1 \text{ мм}$$ (см. решение задачи 205).

Тогда $l = l_0 + \Delta l = 181$ *мм*.

207. Наблюдатель с нормальным зрением рассматривает Луну в телескоп, окуляр которого имеет фокусное расстояние 5 *см*. На сколько нужно выдвинуть окуляр, чтобы получить изображение Луны на экране, поставленном на расстоянии 25 *см* от окуляра?

Дано:

$F = 5$ *см* $= 0{,}05$ *м*;
$f_1 = 25$ *см* $= 0{,}25$ *м*.
x — ?

Решение

Так как $F = 5$ *см*, а расстояние наилучшего зрения $f_1 = 25$ *см*, то расстояние d_1 (рис. 107) действительного изображения от окуляра определяем по формуле линзы

$$-\frac{1}{f_1} + \frac{1}{d_1} = \frac{1}{F},$$

откуда

$$d_1 = \frac{f_1 F}{F + f_1}.$$

Расстояние d_2 окуляра от полученного изображения при сопряженном фокусе $f_2 = 25$ *см* находим по аналогичной формуле

$$\frac{1}{f_2} + \frac{1}{d_2} = \frac{1}{F},$$

отсюда

$$d_2 = \frac{f_2 F}{f_2 - F}.$$

Вычитая из d_2 значение d_1, получаем

$$x = \frac{f_2 F}{f_2 - F} - \frac{f_1 F}{f_1 + F}.$$

Поскольку $f_1 = f_2 = f$, то

$$x = \frac{f_2 F}{f_2 - F} - \frac{f_1 F}{f_1 + F} = \frac{2fF^2}{f^2 - F^2}.$$

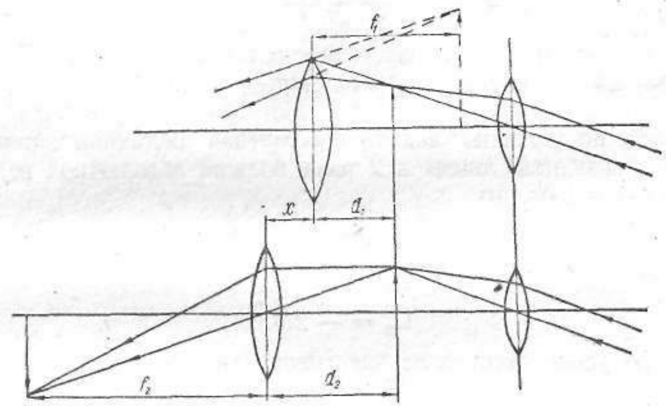


Рис. 107

Подставляя значения, находим

$$x = \frac{2 \cdot 0{,}25 \cdot 0{,}05^2}{0{,}25^2 - 0{,}05^2} = 0{,}021 \text{ м}.$$

208. С помощью объектива, который состоит из тонких, плотно прилегающих рассеивающей и собирающей линз, предмет проектируется на экран. Определить главное фокусное расстояние рассеивающей линзы, если ее оптическая сила в 2 раза больше (по абсолютной величине) оптической силы собирающей линзы. Расстояние от объектива до предмета 25 *см*, а до изображения — 4 *м*.

Дано:

$d = 25$ *см* $= 0{,}25$ *м*;
$f = 4$ *м*;
$D_р = 2D_с$.
$F_р$ — ?

Решение

Оптическая сила объектива равна сумме оптических сил собирающей и рассеивающей линз:

$$D = D_c - D_p.$$

Кроме того, оптическая сила объектива

$$D = \frac{1}{F} = \frac{1}{d} + \frac{1}{f} = \frac{f+d}{df},$$

где F — главное фокусное расстояние объектива; d — расстояние от объектива до предмета; f — расстояние от объектива до изображения.

Так как по условию задачи абсолютная величина оптической силы рассеивающей линзы в 2 раза больше абсолютной величины собирающей линзы, то

$$D = \frac{D_p}{2} - D_p = -\frac{D_p}{2},$$

откуда

$$D_p = -2D.$$

Главное фокусное расстояние рассеивающей линзы

$$F_p = \frac{1}{D_p} = -\frac{1}{2D} = -\frac{df}{2(f+d)},$$

$$F_p = \frac{-0{,}25\ м \cdot 4\ м}{2 \cdot 4{,}25\ м} \approx -0{,}12\ м.$$

209. В вогнутое зеркало радиусом 80 *см* налит тонкий слой воды. Показатель преломления воды равен 4/3. Определить фокусное расстояние этой системы.

Дано:

$r = 80\ см = 0{,}8\ м;$

$n = 4/3.$

F_1 — ?

Решение

Луч света PR, падающий на зеркало параллельно главной оптической оси, после отражения пересечет ось в точке O_1, расстояние $AO_1 = F = \frac{r}{2}$. При наполнении зеркала водой этот луч при выходе из воды в воздух преломится и пересечет оптическую ось

в точке O_2 (рис. 108, *а*). На рис. 108, *б* показан ход лучей в увеличенном виде. Если α — угол падения луча на поверхность воды после отражения от зеркала и β — угол преломления, то из рис. 108, *б* видно, что

$$CK = KO_1 \cdot \operatorname{tg} \alpha,$$
$$CK = KO_2 \cdot \operatorname{tg} \beta,$$

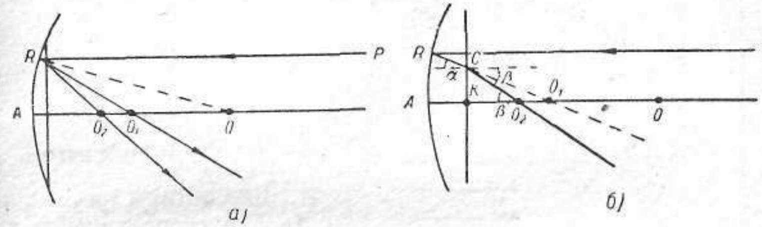


Рис. 108

откуда

$$KO_2 = KO_1 \cdot \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\operatorname{tg} \beta}.$$

При малых углах падения отношение тангенсов можно заменить отношением синусов. Тогда

$$KO_2 = KO_1 \cdot \frac{\sin \alpha}{\sin \beta}.$$

Так как

$$\frac{\sin \beta}{\sin \alpha} = n,$$

то

$$KO_2 = \frac{KO_1}{n}.$$

При незначительной толщине слоя воды в зеркале отрезком AK можно пренебречь по сравнению с AO_1 и AO_2. Следовательно,

$$KO_2 \approx F_1, \; KO_1 \approx F,$$

откуда

$$F_1 = \frac{F}{n} = \frac{r}{2n}.$$

Подставляя численные значения, получаем

$$F_1 = \frac{0{,}8\ м}{2} \cdot \frac{3}{4} = 0{,}3\ м.$$

210. На прозрачную сферическую поверхность радиусом 2 *см*, разделяющую воздух и среду с показателем преломления 1,6, падает из воздуха тонкий пучок параллельных лучей (рис. 109). На каком расстоянии от поверхности сферы лучи сойдутся?

Дано:

$r = 2$ *см* $= 2\cdot 10^{-2}$ *м*;
$n = 1{,}6$.

F — ?

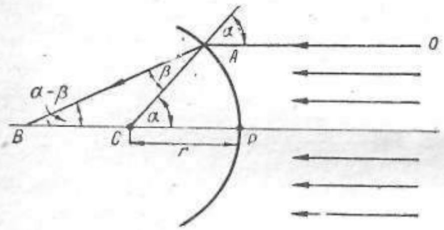


Рис. 109

Решение

Рассмотрим треугольник ABC и воспользуемся теоремой синусов:

$$\frac{BC}{\sin\beta} = \frac{CA}{\sin(\alpha-\beta)},$$

где $CA = r$ (C — центр сферической поверхности). По условию задачи углы α и β малы (луч AO очень близок к BP — пучок лучей тонкий). Значит, синусы можно заменить самими углами, выраженными в радианах. Поэтому

$$BC = r\frac{\beta}{\alpha-\beta}.$$

Разделим числитель и знаменатель на β и величину $\frac{\alpha}{\beta}$ заменим показателем преломления среды n, так как $n = \frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \frac{\alpha}{\beta}$. Получим

$$BC = r\frac{1}{n-1}.$$

Таким образом,

$$F = BP = BC + r = r\frac{n}{n-1},$$

$$F = 2\cdot 10^{-2}\ \text{м}\ \frac{1{,}6}{1{,}6-1} = 5{,}4\cdot 10^{-2}\ \text{м} = 5{,}4\ \text{см}.$$

ФОТОМЕТРИЯ

211. Две лампы, подвешенные к потолку на высоте 2 *м* от горизонтальной плоскости MN и на расстоянии 2 *м* друг от друга (рис. 110), дают каждая в отдельности силу света в 100 *св*. Определить освещенность на поверхности MN в точках под источниками света и в точке D посредине между лампами.

Дано:

$I = 100$ *св*;
$h = 2$ *м*;
$l = 2$ *м*.

E_C — ? E_D — ?

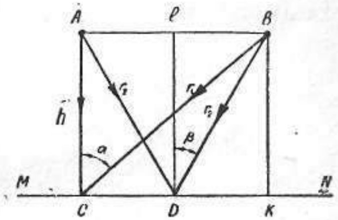


Рис. 110

Решение

Освещенность в точках под источниками света равна сумме освещенностей, создаваемых источниками A и B. Освещенность в точке C от источника A будет

$$E'_C = \frac{I}{h^2}.$$

Освещенность от источника B в точке C будет

$$E''_C = \frac{I}{r^2}\cos\alpha = \frac{I}{h^2+l^2}\cdot\frac{h}{(h^2+l^2)^{1/2}} = \frac{Ih}{(h^2+l^2)^{3/2}}.$$

Суммарная освещенность в точке C, равно как и в точке K, будет

$$E_C = E'_C + E''_C = I\left[\frac{1}{h^2} + \frac{h}{(h^2+l^2)^{3/2}}\right],$$

$$E_C = 100\ \text{св}\left[\frac{1}{4} + \frac{2}{(4+4)^{3/2}}\right]\text{м}^{-2} = 34\ \text{лк}.$$

Определим освещенность точки D от источника B (такая же освещенность будет и от источника A):

$$E = I\frac{\cos\beta}{r_2^2} = \frac{I}{h^2+\frac{l^2}{4}}\cdot\frac{h}{\left(h^2+\frac{l_2}{4}\right)^{1/2}} = \frac{Ih}{\left(h^2+\frac{l^2}{4}\right)^{3/2}}.$$

Освещенность точки D будет

$$E_D = 2E = \frac{2Ih}{\left(h^2+\frac{l^2}{4}\right)^{3/2}}.$$

$$E_D = \frac{2 \cdot 100\ св \cdot 2\ м}{(4+1)^{3/2}\ м^3} \approx 36\ лк.$$

212. На двух вершинах (S_1 и S_2) равностороннего треугольника со стороной, равной 2 *м*, расположены два источника света по 100 *св* каждый.

Как следует расположить пластинку BC, чтобы она была освещена максимально (рис. 111)? Чему равно максимальное значение освещенности?

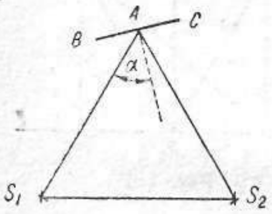


Рис. 111

Дано:

$a = 2\ м;$
$I = 100\ св.$
E_{max} — ?

Решение

Если нормаль к пластинке составляет угол α со стороной AS_1, то освещенность пластинки

$$E = \frac{I}{a^2}[\cos\alpha + \cos(60° - \alpha)].$$

Так как $\cos\alpha + \cos(60° - \alpha) = \cos 30° \cos(\alpha - 30°)$, то

$$E = \frac{I}{a^2}\cos 30° \cos(\alpha - 30°).$$

Пластинка будет освещена максимально, если

$$\cos(\alpha - 30°) = 1,\ \text{т. е. } \alpha = 30°.$$

При этом пластинка параллельна стороне треугольника S_1S_2. Величина освещенности

$$E_{max} = \frac{I}{a^2}\cos 30°,$$

$$E_{max} = \frac{100}{4} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \approx 21\ лк.$$

213. Точечный источник света S освещает поверхность MN. Как изменится освещенность в точке A, в которой лучи от S падают на поверхность перпендикулярно, если сбоку от источника света S на таком же расстоянии, как освещаемая поверхность, поместить плоское зеркало Z, отражающее свет в точку A (рис. 112)? Коэффициент отражения принять равным 1.

Решение

Светящаяся точка S дает в зеркале мнимое изображение S_1, которое находится за зеркалом на таком же расстоянии, как S перед зеркалом. Тогда треугольник SBS_1 будет равнобедренным и $SB = BS_1$. Таким образом, точка A на поверхности MN освещается как бы двумя источниками света: светящейся точкой S и ее мнимым изображением S_1. Когда точка A освещается только светящейся точкой S, то освещенность в этой точке

$$E_1 = \frac{I}{a^2},$$

где I — сила света точечного источника.

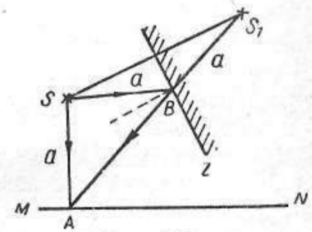


Рис. 112

При наличии зеркала освещенность точки A равна

$$E_2 = \frac{I}{a^2} + \frac{I\cos\alpha}{AS_1^2}.$$

Так как

$$AB = a\sqrt{2},\ \text{то } AS_1 = AB + BS_1 = a\sqrt{2} + a;$$

$$\text{угол } \alpha = 45° \text{ и } \cos\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

После преобразований получим

$$E_2 = \frac{I}{a^2} + \frac{I\sqrt{2}}{2(a\sqrt{2}+a)^2} = \frac{I}{a^2} + \frac{I\sqrt{2}}{2a^2(3+2\sqrt{2})}$$

или

$$E_2 = \frac{I}{a^2}\left[1 + \frac{1{,}41}{6+5{,}64}\right] = 1{,}12\frac{I}{a^2}.$$

Тогда

$$\frac{E_2}{E_1} = 1{,}12\frac{I}{a^2} : \frac{I}{a^2} = 1{,}12.$$

214. В карманном фонарике впереди нити лампочки на расстоянии 2 *см* от нее установлена собирающая линза с фокусным расстоянием 3 *см*. Как изменится средняя освещенность поверхности, расположенной на расстоянии 1 *м* от линзы перпендикулярно главной оптической оси, если линзу снять с фонарика? Нить лампы считать точечным источником света.

Дано:

$SO = 2\ см = 0{,}02\ м;$
$F = 3\ см = 0{,}03\ м;$
$OA = 1\ м.$

$\frac{E_1}{E_2}$ — ?

Решение

При наличии линзы фонарь будет освещать круг радиусом AB (рис. 113), а в ее отсутствие — радиусом AC. Поэтому

$$\frac{E_1}{E_2} = \left(\frac{AC}{AB}\right)^2,$$

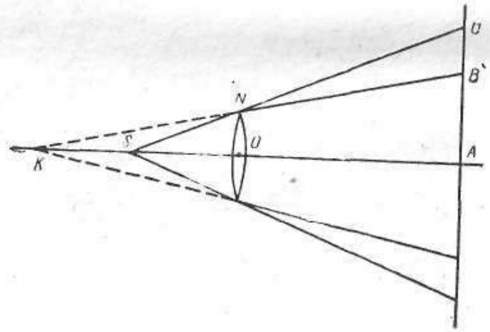


Рис. 113

где E_1 — освещенность при наличии линзы; E_2 — при ее отсутствии.

Очевидно, что

$$\frac{AC}{ON} = \frac{AO + OS}{OS},$$

откуда

$$AC = \frac{ON\,(AO + OS)}{OS}.$$

Далее,

$$\frac{AB}{ON} = \frac{AO + OK}{OK},$$

откуда

$$AB = \frac{ON\,(AO + OK)}{OK}.$$

Подставляя вместо AB и AC их значения, получим

$$\frac{E_1}{E_2} = \left[\frac{(AO + OS)\,OK}{(AO + OK)\,OS}\right]^2.$$

Из формулы линзы найдем

$$OK = \frac{F \cdot OS}{F - OS}.$$

Вычислив по известным величинам F и OS длину отрезка OK, можно определить отношение освещенностей. При указанных условиях освещенность в случае применения линзы оказывается приблизительно в 8,33 раза больше, чем при ее отсутствии.

215. Автомобильная лампочка, которую можно принять за точечный источник света силой 20 *св*, находится на расстоянии 2 *м* от собирающей линзы диаметром 8 *см*. За линзой расположен экран, на котором лучи света, прошедшие через линзу, дают световой кружок диаметром 2 *см*. Определить освещенность кружка (рис. 114). Поглощением линзы пренебречь.

Дано:

$AB = D_1 = 8\ см = 0{,}08\ м;$
$I = 20\ св;$
$CD = D_2 = 2\ см = 0{,}02\ м;$
$SO = d = 2\ м.$

E — ?

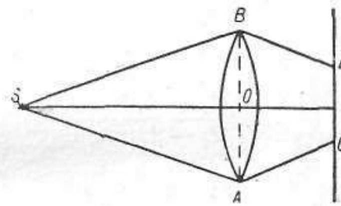


Рис. 114

Решение

Известно, что освещенность в общем случае определяется как отношение светового потока Φ к величине площадки S, на которую он падает, т. е.

$$E = \frac{\Phi}{S}.$$

В этом выражении

$$S = \frac{\pi D_2^2}{4},$$

а Φ можно определить следующим образом:

$$\Phi = \omega I,$$

где

$$\omega = \frac{S_1}{d^2} = \frac{\pi D_1^2}{4d^2}.$$

Таким образом,

$$E = \frac{\Phi}{S} = \frac{\pi D_1^2 \cdot 4I}{4d^2 \pi D_2^2} = \frac{D_1^2 I}{d^2 D_2^2}.$$

После подстановки численных значений получим

$$E = \frac{(0{,}08)^2 \cdot 20}{4 \cdot 0{,}02^2} = 80 \text{ лк}.$$

216. Для печатания фотоснимка на расстоянии 1 *м* от лампы, имеющей силу света 60 *св*, требуется 1,5 *сек*. Какова будет продолжительность печатания при лампе в 25 *св* на расстоянии 1,5 *м*? Предполагается, что общее количество световой энергии, полученной фотоснимком в обоих случаях, одинаково.

Дано:

$I_1 = 60$ *св*;
$I_2 = 25$ *св*;
$r_1 = 1$ *м*;
$r_2 = 1{,}5$ *м*;
$t_1 = 1{,}5$ *сек*.

t_2 — ?

Решение

Количество световой энергии в первом случае будет равно

$$W_1 = \Phi_1 t_1,$$

а во втором —

$$W_2 = \Phi_2 t_2,$$

где Φ_1 и Φ_2 — световые потоки соответственно от ламп I_1 и I_2. Освещенность

$$E = \frac{\Phi}{S} \quad \text{или} \quad E = \frac{I}{r^2}.$$

Тогда

$$\Phi = ES = \frac{I}{r^2} S.$$

Пользуясь условием задачи ($W_1 = W_2$), получим

$$\Phi_1 t_1 = \Phi_2 t_2; \quad \frac{I_1}{r_1^2} S t_1 = \frac{I_2}{r_2^2} S t_2.$$

Отсюда

$$t_2 = \frac{I_1 r_2^2}{I_2 r_1^2} t_1,$$

$$t_2 = \frac{60}{25} \left(\frac{1{,}5}{1}\right)^2 \cdot 1{,}5 \text{ сек} \approx 8 \text{ сек}.$$

ВОЛНОВЫЕ СВОЙСТВА И ДЕЙСТВИЕ СВЕТА

217. Как с помощью дифракционной решетки определить скорость света в воде, если известна скорость света в воздухе ($c = 300\,000$ *км/сек*).

Дано:

$c = 300\,000$ *км/сек*.

v — ?

Решение

Поместим дифракционную решетку вплотную к аквариуму, наполовину наполненному водой. За аквариумом поставим экран. Уровень воды должен находиться на середине дифракционной решетки (рис. 115, *а*). Лучи света от источника S, проходящие через дифракционную решетку, сверху проходят в воздухе, снизу — в воде. На экране DE получим две серии линий: верхняя соответствует прохождению света через воздух, нижняя — через воду (рис. 115, *б*).

Воспользовавшись выражением $\lambda = d \sin \alpha$, можно записать формулы для воздуха

$$\lambda_{\text{возд}} = d \sin \alpha$$

и для воды

$$\lambda_{\text{воды}} = d \sin \beta,$$

где d — постоянная дифракционной решетки. Разделив почленно предыдущие два выражения, получим

$$\frac{\lambda_{\text{возд}}}{\lambda_{\text{воды}}} = \frac{\sin\alpha}{\sin\beta} \approx \frac{\operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{tg}\beta}.$$

Из рис. 115, *в* следует, что

$$\frac{\operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{tg}\beta} = \frac{O_1A_1}{O_1A_2}.$$

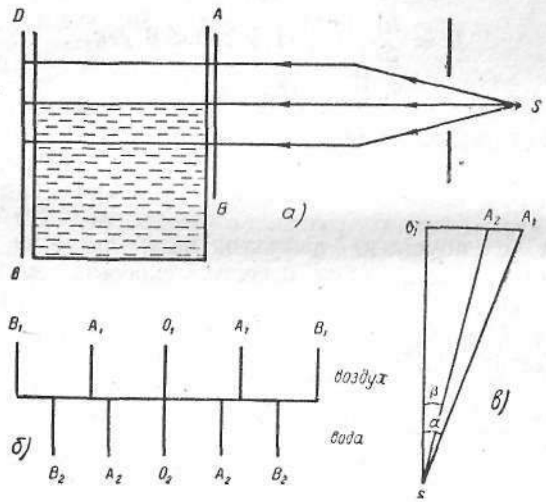


Рис. 115

Тогда

$$\frac{\lambda_{\text{возд}}}{\lambda_{\text{воды}}} = \frac{O_1A_1}{O_1A_2}.$$

С другой стороны,

$$\lambda_{\text{возд}} = c\,\frac{1}{\nu};$$

$$\lambda_{\text{воды}} = v\,\frac{1}{\nu},$$

где ν — частота, одинаковая для обеих сред.

Соответственно получим

$$\frac{\lambda_{\text{возд}}}{\lambda_{\text{воды}}} = \frac{c}{v}$$

или

$$\frac{c}{v} = \frac{O_1A_1}{O_1A_2}.$$

Экспериментальные величины всегда дают

$$\frac{O_1A_1}{O_1A_2} \approx 1{,}33,$$

откуда

$$v = \frac{c}{1{,}33} = 225\,563 \ \textit{км/сек}.$$

218. На грампластинку для проигрывания с числом 78 *об/мин* падает пучок света и, отразившись от нее, дает на экране дифракционную картину (рис. 116, *а*). Определить длину световой волны, если расстояние от грампластинки до экрана 320 *мм*, расстояние на экране от плоскости пластинки до первого дифракционного максимума 37 *мм* и до зеркально отраженного пучка 42 *мм*. Грампластинка проигрывается за 2 *мин* 55 *сек*, ширина записи звука по радиусу 6,95 *см*.

Дано:

$n = 78$ *об/мин*;
$s = 320$ *мм* $= 0{,}32$ *м*;
$l_1 = 37$ *мм* $= 0{,}037$ *м*;
$l_0 = 42$ *мм* $= 0{,}042$ *м*;
$t = 2$ *мин* 55 *сек* $= 175$ *сек*;
$a = 6{,}95$ *см* $= 0{,}0695$ *м*.

λ — ?

Решение

Известно, что усиление световых лучей происходит тогда, когда разность их хода равна $k\lambda$, где $k = \pm 1;\ \pm 2,\ \pm 3,\ \ldots;$ λ — длина световой волны. Разность хода лучей I и II (рис. 116, *б*) равна $CB - AD$. Из рис. 116, *б* следует, что $CB = d\sin\alpha$ и $AD = d\sin(\alpha+\beta)$, где α — угол падения; β — угол, отсчитываемый от отраженного луча, под которым возникает первый интерференционный максимум k-го порядка.

Тогда условие усиления света запишется так:

$$d\,[\sin\alpha - \sin(\alpha+\beta)] = k\lambda.$$

Так как

$$\operatorname{ctg}\alpha = \frac{l_0}{s} \ \text{и}\ \operatorname{ctg}(\alpha+\beta) = \frac{l_1}{s} \quad (\text{рис. } 116, \textit{в}),$$

то

$$\sin\alpha = \frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{ctg}^2\alpha}} = \frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{l_0}{s}\right)^2}} = \frac{s}{\sqrt{s^2+l_0^2}}.$$

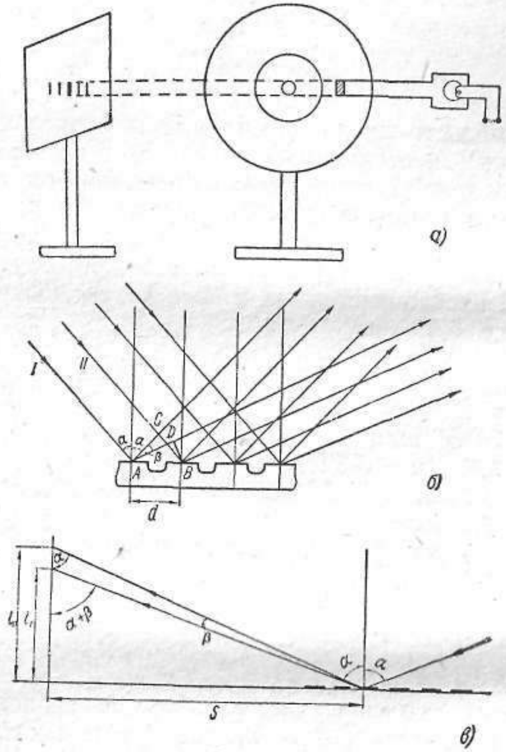


Рис. 116

Аналогичным образом

$$\sin(\alpha+\beta) = \frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{l_1}{s}\right)^2}} = \frac{s}{\sqrt{s^2+l_1^2}}.$$

Подставляя данные значения в условие усиления света получим

$$d\left(\frac{s}{\sqrt{s^2+l_0^2}} - \frac{s}{\sqrt{s^2+l_1^2}}\right) = k\lambda$$

или

$$\lambda = \frac{ds}{k}\left(\frac{1}{\sqrt{s^2+l_0^2}} - \frac{1}{\sqrt{s^2+l_1^2}}\right).$$

Определим постоянную дифракционной решетки d. Полное число оборотов пластинки за время проигрывания $N = \frac{78}{60}\cdot t$. Так как за один оборот пластинки игла адаптера смещается по радиусу на расстояние, равное постоянной решетки, то

$$d = \frac{a}{N} = \frac{60a}{78t}.$$

Тогда

$$\lambda = \frac{60as}{78tk}\left(\frac{1}{\sqrt{s^2+l_0^2}} - \frac{1}{\sqrt{s^2+l_1^2}}\right).$$

Подставляя численные значения и учитывая, что в нашем случае $k = -1$, получим

$$\lambda = \frac{60\cdot 0{,}32\ м\cdot 0{,}0695\ м}{78\ сек^{-1}\cdot 175\ сек\cdot(-1)}\left(\frac{1}{\sqrt{0{,}32^2\ м^2 + 0{,}042^2\ м^2}} - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{\sqrt{0{,}32^2\ м^2 + 0{,}037^2\ м^2}}\right) \approx 0{,}00000058\ м = 0{,}58\ мк.$$

219. Определить величину кванта энергии, соответствующего длине волны 1 *мк*.

Дано:

$\lambda = 1\ мк = 10^{-6}\ м;$
$h = 6{,}62\cdot 10^{-34}\ дж\cdot сек;$
$c = 3\cdot 10^8\ м/сек.$

ε — ?

Решение

Величина кванта энергии выражается формулой

$$\varepsilon = h\nu = \frac{hc}{\lambda},$$

где h — постоянная Планка; c — скорость света; λ — длина волны; ν — частота колебания.

Подставив численные данные, получим:

$$\varepsilon = \frac{6{,}62\cdot 10^{-34}\ дж\cdot сек\cdot 3\cdot 10^8\ м/сек}{10^{-6}\ м} = 1{,}98\cdot 10^{-19}\ дж.$$

220. Монохроматический источник света, потребляя мощность 50 *вт*, излучает зеленый свет длиной волны 5300 Å. Определить число световых квантов, излучаемых источником света в секунду, если его к. п. д. 0,2%.

Дано:

$N = 50$ *вт*;
$\lambda = 5300$ Å $= 5,3 \cdot 10^{-7}$ *м*;
$\eta = 0,002$;
$h = 6,62 \cdot 10^{-34}$ *дж·сек*;
$c = 3 \cdot 10^8$ *м/сек*.

n — ?

Решение

Мощность излучения $N_1 = \eta N$. Излучению с длиной волны λ соответствуют кванты, энергия которых

$$\varepsilon = h\nu = \frac{hc}{\lambda}.$$

Следовательно, источник света излучает в секунду число световых квантов

$$n = \frac{N_1}{\varepsilon} = \frac{\eta N \lambda}{hc},$$

$$n = \frac{0,002 \cdot 50\ вт \cdot 5,3 \cdot 10^{-7}\ м}{6,62 \cdot 10^{-34} дж \cdot сек \cdot 3 \cdot 10^8\ м/сек} \approx 2,6 \cdot 10^{17} \text{ (квантов)}.$$

221. Для вырывания электрона из поверхности цезия должна быть совершена работа 1,97 *эв*. С какой кинетической энергией и скоростью вылетают электроны из цезия, если металл освещен желтым светом с длиной волны 580 *ммк*?

Дано:

$A = 1,97$ *эв* $= 3,15 \cdot 10^{-19}$ *дж*;
$\lambda = 580$ *ммк* $= 5,8 \cdot 10^{-7}$ *м*;
$h = 6,62 \cdot 10^{-34}$ *дж·сек*;
$c = 3 \cdot 10^8$ *м/сек*;
$m = 9,1 \cdot 10^{-31}$ *кг*.

v — ?

Решение

Энергия кванта излучения с длиной волны λ равна

$$\varepsilon = h\nu = \frac{hc}{\lambda},$$

где h — постоянная Планка; c — скорость света.

За счет этой энергии кванта будет совершена работа A вырывания электрона из металла и сообщена ему кинетическая энергия $\frac{mv^2}{2}$, где m — масса электрона; v — его скорость.

Запишем закон фотоэффекта (формулу Эйнштейна):

$$\frac{hc}{\lambda} = A + E_к; \quad E_к = \frac{hc}{\lambda} - A,$$

$$E_к = \frac{6,62 \cdot 10^{-34}\ дж \cdot сек \cdot 3 \cdot 10^8\ м/сек}{5,8 \cdot 10^{-7}\ м} - 3,15 \cdot 10^{-19}\ дж \approx 2,7 \cdot 10^{-20}\ дж.$$

Из выражения для кинетической энергии $E_к = \frac{mv^2}{2}$ определяем скорость электрона

$$v = \sqrt{\frac{2E_к}{m}},$$

где m — масса электрона.

$$v = \sqrt{\frac{2 \cdot 2,7 \cdot 10^{-20}\ дж}{9,1 \cdot 10^{-31}\ кг}} \approx 2,4 \cdot 10^5\ м/сек.$$

222. Определить порог фотоэффекта для вольфрама, если работа выхода электрона из него равна 4,54 электрон-вольта.

Дано:

$A = 4,54$ *эв* $= 7,264 \cdot 10^{-19}$ *дж*;
$h = 6,62 \cdot 10^{-34}$ *дж·сек*;
$c = 3 \cdot 10^8$ *м/сек*.

λ — ?

Решение

Закон фотоэффекта

$$h\nu = A + \frac{mv^2}{2}$$

для граничной частоты, когда скорость $v = 0$, принимает вид

$$h\nu = A.$$

Длина волны света $\lambda = \frac{c}{\nu}$, откуда $\nu = \frac{c}{\lambda}$, где c — скорость света; λ — длина волны; ν — частота света.

Следовательно, заменив ν его значением, получим

$$\frac{hc}{\lambda} = A, \quad \text{откуда } \lambda = \frac{hc}{A},$$

$$\lambda = \frac{6{,}62 \cdot 10^{-34}\ \textit{дж} \cdot \textit{сек} \cdot 3 \cdot 10^{8}\ \textit{м/сек}}{7{,}264 \cdot 10^{-19}\ \textit{дж}} \approx 2{,}74 \cdot 10^{-7}\ \textit{м}.$$

ГЛАВА V

СТРОЕНИЕ АТОМА

223. Определить скорость α-частицы, обладающей энергией 1 *эв*.

Дано:

$E = 1\ \textit{эв} = 1{,}6 \cdot 10^{-19}\ \textit{дж}.$

v — ?

Решение

Из формулы кинетической энергии движущейся частицы

$$E = \frac{1}{2} mv^2$$

(m — масса, v — скорость частицы) определяем скорость

$$v = \sqrt{\frac{2E}{m}}.$$

Для подсчета массы α-частицы необходимо атомную массу α-частицы (4,00274) умножить на атомную единицу массы ($1{,}66 \cdot 10^{-27}$ *г*):

$$m = 4{,}00274 \cdot 1{,}66 \cdot 10^{-27}\ \textit{кг} = 6{,}64 \cdot 10^{-27}\ \textit{кг}.$$

Подставляя численные значения $E = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ *дж*, $m = 6{,}64 \cdot 10^{-27}$ *кг*, найдем

$$v = \sqrt{\frac{2 \cdot 1{,}6 \cdot 10^{-19}\ \textit{дж}}{6{,}64 \cdot 10^{-27}\ \textit{кг}}} = 6940\ \textit{м/сек}.$$

224. Во сколько раз линейная скорость движения электрона по первой боровской орбите атома водорода ($r = 0{,}53$Å) больше скорости движения самолета (1000 *км/ч*)?

Дано:

$r = 0{,}53\text{Å} = 0{,}53 \cdot 10^{-8}$ *см*;
$m = 9{,}1 \cdot 10^{-28}$ *г*;
$e = 4{,}8 \cdot 10^{-10}$ CGSE;
$v_2 = 1000$ *км/ч* $\approx 277{,}8 \cdot 10^2$ *см/сек.*

v_1 — ? $\frac{v_1}{v_2}$ — ?

Решение

Сила F электрического взаимодействия электрона с ядром атома определяется по закону Кулона $F = \frac{e^2}{r^2}$. Эта сила должна быть равна центростремительной силе, удерживающей электрон на круговой орбите радиусом r:

$$F = \frac{mv_1^2}{r},$$

где m — масса; v_1 — линейная скорость электрона; r — радиус его первой орбиты.

Поэтому

$$\frac{e^2}{r^2} = \frac{mv_1^2}{r},$$

откуда

$$v_1 = \frac{e}{\sqrt{mr}},$$

$$v_1 = \frac{4{,}8 \cdot 10^{-10}}{\sqrt{9{,}1 \cdot 10^{-28} \cdot 0{,}53 \cdot 10^{-8}}} = 2{,}2 \cdot 10^8 \text{ см/сек.}$$

Линейная скорость движения электрона по окружности больше скорости движения самолета в

$$\frac{2{,}2 \cdot 10^8}{277{,}8 \cdot 10^2} = 7920 \text{ раз.}$$

225. Во сколько раз напряженность электрического поля на первой орбите водорода ($r = 0{,}53\text{Å}$) больше напряженности поля в атмосфере перед сильным грозовым разрядом (10^8 *в/км*)?

Дано:

$r = 0{,}53\text{Å} = 0{,}53 \cdot 10^{-8}$ *см*;
$e = 4{,}8 \cdot 10^{-10}$ CGSE;
$E_2 = 10^8$ *в/км* $= 10^5$ *в/м.*

E_1 — ? $\frac{E_1}{E_2}$ — ?

Решение

Напряженность электрического поля определяется по формуле

$$E_1 = \frac{e}{r^2},$$

где e — заряд ядра; r — радиус орбиты.

После подстановки численных значений получим

$$E_1 = \frac{4{,}8 \cdot 10^{-10}}{(0{,}53 \cdot 10^{-8})^2} = 17{,}09 \cdot 10^6 \text{ CGSE} = 5{,}1 \cdot 10^{11} \text{ в/м.}$$

Напряженность электрического поля на первой орбите электрона в атоме водорода в

$$\frac{E_1}{E_2} = \frac{5{,}1 \cdot 10^{11}}{10^5} = 5{,}1 \cdot 10^6 \text{ раз}$$

больше, чем в атмосфере перед сильным грозовым разрядом.

226. При переходе электрона атома водорода из одной орбиты в другую, более близкую к ядру, энергия атома уменьшается на $\varepsilon = 1{,}892$ *эв.* При этом атом водорода излучает квант света. Определить длину волны излучения.

Дано:

$\varepsilon = 1{,}892$ *эв* $= 3{,}027 \cdot 10^{-19}$ *дж*;
$h = 6{,}62 \cdot 10^{-34}$ *дж·сек*;
$c = 3 \cdot 10^8$ *м/сек.*

λ — ?

Решение

Энергия кванта излучения ε, с одной стороны, равна уменьшению энергии излучающего атома. С другой, она связана с частотой колебания ν или длиной волны λ следующим соотношением:

$$\varepsilon = h\nu = \frac{hc}{\lambda}.$$

Поэтому длина волны излучения

$$\lambda = \frac{hc}{\varepsilon},$$

$$\lambda = \frac{6{,}62 \cdot 10^{-34} \text{ дж} \cdot \text{сек} \cdot 3 \cdot 10^8 \text{ м/сек}}{3{,}027 \cdot 10^{-19} \text{ дж}} \approx 6{,}6 \cdot 10^{-7} \text{ м.}$$

227. Определить массу и объем радона, находящегося в равновесии с 1 *г* радия.

Дано:

$m_1 = 1$ *г*;
$\lambda_1 = 1{,}39 \cdot 10^{-11}$ *сек*$^{-1}$;
$\lambda_2 = 2{,}1 \cdot 10^{-6}$ *сек*$^{-1}$;
$\mu_1 = 226$ *г/моль*;
$\mu_2 = 222$ *г/моль*.

m_2 — ? V — ?

Решение

Для решения задачи используем условие равновесия при радиоактивном распаде

$$\lambda_1 N_1 = \lambda_2 N_2,$$

откуда

$$N_2 = N_1 \frac{\lambda_1}{\lambda_2},$$

где λ_1 и λ_2 — постоянные радиоактивного распада радия и радона; N_1 и N_2 — число атомов радия и радона в условии равновесия.

Один грамм радия содержит следующее число атомов:

$$N_1 = \frac{N}{\mu_1},$$

где N — число Авогадро; μ_1 — молекулярный вес радия.
Тогда

$$N_2 = N \frac{\lambda_1}{\mu_1 \lambda_2}.$$

Так как 1 *г* радона содержит $N_3 = \frac{N}{\mu_2}$ атомов (где μ_2 — молекулярный вес радона), то в состоянии равновесия находится $m_2 = \frac{N_2}{N_3}$ *г* радона, т. е. $m_2 = \frac{\mu_2 \lambda_1}{\mu_1 \lambda_2}$,

$$m_2 = \frac{222 \cdot 1{,}39 \cdot 10^{-11}}{226 \cdot 2{,}1 \cdot 10^{-6}} = 0{,}65 \cdot 10^{-5}\ г = 6{,}5 \cdot 10^{-9}\ кг.$$

При нормальных условиях 222 *г* радона занимают объем $V_0 = 22{,}4 \cdot 10^{-3}$ *м*^{3}. Тогда искомый объем

$$V = V_0 \frac{m_2}{\mu},$$

$$V = 22{,}4 \cdot 10^{-3} \cdot \frac{0{,}65 \cdot 10^{-5}}{222} = 6{,}6 \cdot 10^{-10}\ м^3 = 6{,}6 \cdot 10^{-4}\ см^3.$$

228. Применив к упругому удару шаров законы сохранения энергии, равенства действия и противодействия и равенства импульса силы изменению количества движения, рассчитать, какую долю своей энергии теряет нейтрон при лобовом соударении с покоящимся ядром массы M (в а. е. м.). Вычислить максимальную потерю энергии нейтроном при соударении с протоном, дейтроном, ядром углерода и ядром свинца.

Решение

Пусть до соударения скорость шара массы m_1 равна v_0, а шар массы m_2 покоится. После соударения абсолютные величины скоростей шаров равны соответственно v_1 и v_2 (рис. 117). Количество движения шара m_1 в результате соударения изменилось на $m_1 v_0 - m_1 v_1$, а шара m_2 на $0 - m_2 v_2$. В силу равенства действия и противодействия импульсы сил, а следовательно, изменения количества движения шаров при ударе равны по величине и противоположны по знаку. Поэтому

$$m_1 v_0 - m_1 v_1 = m_2 v_2,$$

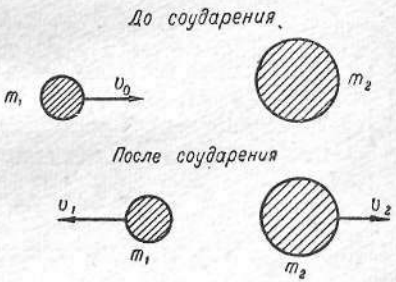


Рис. 117

с другой стороны, по закону сохранения энергии

$$m_1 v_0^2 = m_1 v_1^2 + m_2 v_2^2.$$

Решая эти уравнения относительно v_1 и v_2, найдем долю начальной энергии, переданную шаром m_1 шару m_2:

$$x = \frac{m_2 v_2^2}{m_1 v_0^2} = \frac{4 m_1 m_2}{(m_1 + m_2)^2}.$$

Если $m_1 = 1$ (масса нейтрона в а. е. м.), а M — масса ядра в а. е. м., то

$$x = \frac{4M}{(1 + M)^2}.$$

Итак, максимальная потеря энергии нейтроном при соударении с протоном $x = 100\%$, с дейтроном $x = 44{,}4\%$, с ядром углерода $x = 2{,}4\%$ и ядром свинца $x = 0{,}01\%$.

229. Резерфорд наблюдал, что при лобовом соударении с ядрами α-частиц, обладающих энергией 5 *Мэв*, последние отлетают назад с энергией 3,9 *Мэв*. Определить отношение масс ядра меди и α-частицы.

Дано:

$E = 5$ *Мэв*;
$E_1 = 3{,}9$ *Мэв*.

$\frac{M}{m}$ — ?

Решение

На основании закона сохранения энергии имеем

$$\frac{mv^2}{2} = \frac{mu_1^2}{2} + \frac{Mu_2^2}{2},$$

откуда

$$u_2^2 = \frac{m}{M}(v^2 - u_1^2),$$

где m — масса α-частицы, или ядра гелия; M — масса ядра меди; v и u_1 — скорость α-частицы до и после столкновения; u_2—скорость ядра меди после столкновения.

Согласно закону сохранения количества движения,

$$mv = Mu_2 - mu_1.$$

Перед mu_1 поставлен знак минус потому, что скорости u_1 и u_2 направлены в противоположные стороны. Из последнего уравнения определим

$$u_2 = \frac{m}{M}(v + u_1).$$

Возводя правую часть в квадрат и приравнивая ее правой части уравнения для u_2^2, получим

$$\left(\frac{m}{M}\right)^2 (v + u_1)^2 = \frac{m}{M}(v + u_1)(v - u_1),$$

откуда

$$\frac{M}{m} = \frac{v + u_1}{v - u_1} = \frac{1 + \frac{u_1}{v}}{1 - \frac{u_1}{v}}.$$

Известно, что

$$E = \frac{mv^2}{2} \text{ и } E_1 = \frac{mu_1^2}{2}$$

или

$$\frac{u_1}{v} = \sqrt{\frac{E_1}{E}}.$$

Таким образом,

$$\frac{M}{m} = \frac{1 + \sqrt{\frac{E_1}{E}}}{1 - \sqrt{\frac{E_1}{E}}}, \quad \frac{M}{m} = \frac{1 + \sqrt{\frac{3{,}9}{5}}}{1 - \sqrt{\frac{3{,}9}{5}}} \approx 16.$$

Это означает, что масса ядра меди должна быть в 16 раз больше массы α-частицы, или ядра гелия.

230. При столкновении с протоном нейтрон теряет ту или иную долю своей энергии в зависимости от характера столкновения (лобовое, боковое). В среднем в результате одного соударения с покоящимся протоном энергия нейтрона уменьшается вдвое. Найти среднюю энергию нейтрона после n соударений с протонами.

Решение

После одного соударения нейтрона с протоном средняя энергия нейтрона равна половине начальной энергии:

$$E_{\text{ср}(n=1)} = \frac{1}{2} E_0.$$

После n соударений

$$E_{\text{ср}(n)} = \left(\frac{1}{2}\right)^n E_0.$$

231. Найти энергию связи дейтрона (ядра тяжелого водорода).

Решение

За единицу массы, называемую атомной единицей массы, принимается $^1/_{16}$ массы атома изотопа кислорода с массовым числом 16. Расчеты показывают, что атомная единица массы равна $M = 1{,}66 \cdot 10^{-27}$ *кг*.

Изменение массы на одну атомную единицу соответствует изменению энергии на

$$\Delta E = Mc^2 = 1{,}66 \cdot 10^{-27} \text{ кг} \cdot 9 \cdot 10^{16} \text{ м}^2/\text{сек}^2 = 1{,}49 \cdot 10^{-10} \text{ дж}.$$

Найдем теперь дефект массы дейтрона, определяющий энергию связи. Дейтрон образован из протона и нейтрона. Сумма масс этих частиц равна (см. прил. II, 24)

$$M_1 = 1{,}00757 \text{ а. е. м.} + 1{,}00893 \text{ а. е. м.} = 2{,}01650 \text{ а. е. м.}$$

Масса ядра дейтрона

$$m_я = 2{,}01416.$$

Таким образом, дефект масс

$$\Delta m = M_1 - m_я = 0{,}00234 \text{ а. е. м.}$$

Отсюда энергия связи дейтрона

$$\Delta E = 0{,}00234 \cdot 1{,}49 \cdot 10^{-10} \, дж = 0{,}00348 \cdot 10^{-10} \, дж = 348 \cdot 10^{-15} \, дж.$$

232. Во сколько раз энергия, выделяемая при ядерном делении 1 *кг* урана, больше количества теплоты, получаемой при сгорании цистерны нефти (50 *т* нефти)?

Дано:

$m_1 = 1 \; кг;$
$q = 11\,000 \; ккал/кг = 4{,}6 \cdot 10^7 \; дж/кг;$
$m_2 = 50 т = 5 \cdot 10^4 \; кг.$

n — ?

Решение

Если считать, что при делении одного атома урана на два тяжелых осколка выделяется примерно 190 *Мэв* энергии, то при распаде 1 грамм-атома урана выделится количество энергии, равное

$$E_1 = 190 \cdot 10^6 \cdot 1{,}6 \cdot 10^{-12} \cdot 6{,}02 \cdot 10^{23} = 1{,}8 \cdot 10^{20} \; эрг = 1{,}8 \cdot 10^{13} \; дж.$$

Энергия, выделяемая при полном распаде всех атомных ядер 1 *г* урана,

$$E_2 = \frac{1{,}8 \cdot 10^{13}}{235} = 76{,}6 \cdot 10^9 \; дж,$$

а 1 *кг* урана

$$E = 76{,}6 \cdot 10^{12} \; дж.$$

Цистерна вмещает 50 *т* нефти, калорийность которой $4{,}6 \cdot 10^7$ *дж/кг*. Поэтому при сгорании цистерны нефти выделяется количество теплоты

$$Q = m_2 q = 5 \cdot 10^4 \; кг \cdot 4{,}6 \cdot 10^7 \; дж/кг = 2{,}3 \cdot 10^{12} \; дж.$$

Следовательно, при распаде 1 *кг* урана выделяется в

$$n = \frac{E}{Q} = \frac{76{,}6 \cdot 10^{12}}{2{,}3 \cdot 10^{12}} \approx 33 \text{ раза}$$

больше энергии, чем при сгорании цистерны нефти.

233. Ядерный реактор превращает за сутки в энергию 1 *г* урана. Какова мощность реактора?

Дано:

$m = 1 \; г = 10^{-3} \; кг.$

N — ?

Решение

Энергию можно вычислить с помощью известного соотношения Эйнштейна $W = mc^2$, где c — скорость света. Тогда мощность

$$N = \frac{W}{t} = \frac{mc^2}{t},$$

$$N = \frac{10^{-3} \; кг \cdot (3 \cdot 10^8 \; м/сек)^2}{8{,}64 \cdot 10^4 \; сек} \approx 1{,}04 \cdot 10^9 \; вт.$$

234. Найти число протонов и нейтронов, входящих в состав ядер изотопов азота: ${}_7N^{12}$, ${}_7N^{13}$, ${}_7N^{14}$, ${}_7N^{15}$, ${}_7N^{16}$, ${}_7N^{17}$.

Решение

По общепризнанной в настоящее время гипотезе советского физика Д. Д. Иваненко ядра состоят из протонов и нейтронов. Число протонов в ядре равно порядковому номеру элемента в периодической системе Д. И. Менделеева. Число нейтронов в ядре равно разности между массовым числом элемента и его порядковым номером в этой системе. Ядра изотопов азота имеют по 7 протонов и от 5 до 10 нейтронов, а именно:

ядро	${}_7N^{12}$	содержит	7	протонов и	5	нейтронов
»	${}_7N^{13}$	»	7	»	6	»
»	${}_7N^{14}$	»	7	»	7	»
»	${}_7N^{15}$	»	7	»	8	»
»	${}_7N^{16}$	»	7	»	9	»
»	${}_7N^{17}$	»	7	»	10	»

235. Сколько протонов и нейтронов содержит ядро нобелия (${}_{102}No^{231}$)?

Решение

В ядре нобелия содержится 102 протона и 149 нейтронов.

236. При облучении азота (${}_7N^{14}$) α-частицами обнаружено испускание протона (${}_1H^1$). Какое превращение происходит с ядром азота?

Решение

Образовавшееся из азота ядро нового элемента должно иметь массовое число 17, а по закону сохранения заряда ядер, входящих в реакцию, положительный заряд нового ядра должен быть равен 8. Порядковый номер 8 (равный заряду ядра) имеет кислород. Но так как массовое число полученного ядра не 16, а 17, то очевидно, что в результате ядерной реакции образовался изотоп кислорода с массой 17. Уравнение ядерной реакции можно записать так:

$$_7N^{14} + {}_2He^4 \rightarrow {}_8O^{17} + {}_1H^1.$$

237. При облучении бериллия ($_4Be^9$) α-частицами возможен захват α-частицы ядром атома бериллия. При этом испускается нейтрон ($_0n^1$). Какое превращение происходит с ядром бериллия?

Решение

Происходящая при этом ядерная реакция состоит в захвате α-частицы ядром бериллия, в результате чего образуется ядро углерода ($_6C^{12}$) и испускается нейтрон. Уравнение ядерной реакции записывается так:

$$_4Be^9 + {}_2He^4 \rightarrow {}_6C^{12} + {}_0n^1.$$

238. Записать следующие ядерные реакции: 1) соударение двух дейтронов между собой, в результате чего образуются две частицы, более легкая из которых — протон; 2) то же, но более легкая частица — нейтрон; 3) соударение протона с ядром изотопа лития с массовым числом 7 и образование двух α-частиц; 4) соударение дейтрона с ядром алюминия и образование в результате нового ядра и протона.

Решение

1) $_1H^2 + {}_1H^2 \rightarrow {}_1H^3 + {}_1H^1$, 3) $_3Li^7 + {}_1H^1 \rightarrow 2\,{}_2He^4$.

2) $_1H^2 + {}_1H^2 \rightarrow {}_2He^3 + {}_0n^1$, 4) $_{13}Al^{27} + {}_1H^2 \rightarrow {}_{13}Al^{28} + {}_1H^1$.

239. Записать следующие ядерные реакции с участием нейтронов: 1) расщепление γ-квантом дейтрона на протон и нейтрон; 2) захват нейтрона протоном с испусканием γ-кванта; 3) расщепление γ-квантом ядра $_4Be^9$ с образованием двух α-частиц; 4) захват нейтрона ядром изотопа азота с массой 14 с испусканием протона; 5) соударение ядра бериллия с дейтроном с испусканием нейтрона.

Решение

1) $_1H^2 + \gamma \rightarrow {}_1H^1 + {}_0n^1$, 4) $_7N^{14} + {}_0n^1 \rightarrow {}_6C^{14} + {}_1H^1$,

2) $_1H^1 + {}_0n^1 \rightarrow {}_1H^2 + \gamma$, 5) $_4Be^9 + {}_1H^2 \rightarrow {}_5B^{10} + {}_0n^1$.

3) $_4Be^9 + \gamma \rightarrow 2\,{}_2He^4 + {}_0n^1$,

240. Ядро атома имеет объем V, пропорциональный атомному весу A, т. е. $V = KA$, где K — средний объем, занимаемый одной частицей (протоном или нейтроном), равный $\approx 2 \cdot 10^{-44}$ $м^3$. Определить плотность вещества в ядре атома алюминия. Во сколько раз плотность вещества в ядре атома алюминия больше плотности алюминия?

Решение

По формуле $V = KA$ определим объем ядра атома алюминия:

$$V = 2 \cdot 10^{-44} \cdot 27 = 5{,}4 \cdot 10^{-43}\ м^3.$$

Находим массу ядра атома алюминия, состоящего из 13 протонов и 14 нейтронов

$$m = (1{,}00757 \cdot 13 + 1{,}00894 \cdot 14) \cdot 1{,}66 \cdot 10^{-24} = 4{,}52 \cdot 10^{-23}\ г = 4{,}52 \cdot 10^{-26}\ кг.$$

Плотность вещества в ядре

$$\rho = \frac{4{,}52 \cdot 10^{-26}\ кг}{5{,}4 \cdot 10^{-43}\ м^3} \approx 8 \cdot 10^{16}\ кг/м^3.$$

Так как плотность алюминия равна 2600 $кг/м^3$, то плотность вещества в ядре атома алюминия больше плотности алюминия примерно в

$$\frac{8 \cdot 10^{16}}{2600} \approx 3 \cdot 10^{13}\ раз.$$

ПРИЛОЖЕНИЯ

Приложение I

МЕЖДУНАРОДНАЯ СИСТЕМА ЕДИНИЦ

Изучение физических явлений и их закономерностей, а также применение этих закономерностей в технике связано с измерением физических величин. Измерить какую-нибудь величину — это значит сравнить ее с другой, однородной с нею величиной, которая принята за единицу. Единица для измерения данной физической величины выбирается так, чтобы ею удобно было измерять величины таких размеров, которые наиболее часто встречаются на практике.

Различные физические величины связаны между собой уравнениями, выражающими зависимость между ними. Например, скорость v, длина пройденного пути s и время t связаны известным соотношением

$$v = k\frac{s}{t},$$

где k — коэффициент пропорциональности, зависящий от выбора единиц, в которых измерены v, s, t. Если единицы пути и времени известны, то единицу скорости можно выбрать так, чтобы коэффициент k стал равен единице. Тогда формула скорости упростится и примет вид $v = \frac{s}{t}$. Единицу измерения скорости нецелесообразно выбирать произвольно. Так, если за единицу пути выберем 1 *м*, за единицу времени 1 *сек*, то единица скорости 1 *м/сек*.

Это относится к выбору единиц и всех других физических величин — ускорения, силы, энергии и т. д. Для всех физических величин целесообразно выбирать единицы измерения указанным выше образом, т. е. с помощью формул, выражающих физические закономерности.

Физические величины, единицы измерения которых выбраны независимо, называются *основными величинами*. Физические величины, единицы которых выбраны с помощью определяющих уравнений, называются *производными*, а единицы их измерения — *производными единицами*. Название производных эти величины получили потому, что как они сами, так и их единицы измерения выражаются через основные, т. е. произведены от основных.

Совокупность единиц основных величин и единиц всех производных величин называется системой единиц измерения физических величин или просто системой единиц.

Различие систем единиц заключается в том, какие единицы в данной системе приняты за основные.

В настоящем пособии в основном пользовались Международной системой единиц, которая установлена ГОСТ 9867—61 как система, предпочтительно применяемая во всех областях наук, техники и народного хозяйства, а также в преподавании. Эта система сокращенно обозначается русскими буквами СИ (латинскими SI).

В Международной системе единиц для измерения всех физических единиц в качестве основных выбираются шесть единиц и две дополнительные единицы (табл. 1).

Таблица 1

Наименование величин	Единицы измерения	Сокращенные обозначения единиц измерения
Основные единицы		
Длина	метр	*м*
Масса	килограмм	*кг*
Время	секунда	*сек*
Сила электрического тока	ампер	*а*
Термодинамическая температура	градус Кельвина	°К
Сила света	свеча	*св*
Дополнительные единицы		
Плоский угол	радиан	*рад*
Телесный угол	стерадиан	*стер*

Единицы для измерения остальных физических величин получаются как производные этих основных единиц. Таблицы важнейших производных единиц даны в соответствующих разделах приложения *I*. Там же даны таблицы, устанавливающие соотношения между единицами Международной системы и единицами других систем и внесистемными единицами.

Кратные и дольные единицы образуются путем умножения или деления на степень числа 10. Их наименования получаются путем прибавления указанных в табл. 2 приставок к наименованиям основных и производных единиц (ГОСТ 7663—55).

Кратные и дольные единицы времени и углов образуются по стандарту для них.

Если наименование основной или производной единицы уже включает в себя приставку (как, например, в наименовании «килограмм»), то кратные и дольные приставки добавляются к простому наименованию (т. е. к грамматической основе наименования), взятому без приставки, например, к наименованию «грамм» — миллиграмм, мегаграмм.

Наряду с наименованиями единиц, образованных путем прибавления приставок, могут применяться наименования, особо указываемые в стандартах для соответствующих единиц измерений. Например, мегаграмм называется тонной, а микрометр — микроном. Присоединение приставок к указанным наименованиям единиц для образования от них кратных или дольных единиц не допускается. Например, не допускаются наименования: килотонна, милитонна, декамикрон.

Таблица 2

Кратность и дольность	Наименование приставок	Сокращенное обозначение
$1\,000\,000\,000\,000 = 10^{12}$	тера	*Т*
$1\,000\,000\,000 = 10^{9}$	гига	*Г*
$1\,000\,000 = 10^{6}$	мега	*М*
$1\,000 = 10^{3}$	кило	*к*
$100 = 10^{2}$	гекто	*г*
$10 = 10^{1}$	дека	*да*
$0{,}1 = 10^{-1}$	деци	*д*
$0{,}01 = 10^{-2}$	санти	*с*
$0{,}001 = 10^{-3}$	милли	*м*
$0{,}000\,001 = 10^{-6}$	микро	*мк*
$0{,}000\,000\,001 = 10^{-9}$	нано	*н*
$0{,}000\,000\,000\,001 = 10^{-12}$	пико	*п*

МЕХАНИКА

Составной частью Международной системы единиц является система МКС, предназначенная для измерения механических величин (ГОСТ 7664—61). Эта система была введена в 1901 г. по предложению итальянского инженера Джованни Джорджи. Свое название — МКС — она получила от начальных букв основных единиц. Основными единицами системы МКС являются метр (*м*), килограмм (*кг*) и секунда (*сек*).

Производные единицы системы МКС образуются из основных единиц на основании связи между физическими величинами. Например, определяющим уравнением ускорения является следующее:

$$a = k\frac{\Delta v}{\Delta t},$$

где Δv — изменение скорости равнопеременного движения за время Δt.

Положив в этой формуле $k = 1$, $\Delta v = 1$ *м/сек*, $\Delta t = 1$ *сек*, получим:

$$1 \text{ единица ускорения} = 1\,\frac{1 \text{ м/сек}}{1 \text{ сек}} = 1 \text{ м/сек}^2.$$

Установим единицу силы. Единицу силы F найдем по формуле, выражающей второй закон Ньютона:

$$F = kma,$$

где m — масса тела; a — ускорение, сообщаемое этому телу силой F.

Положив $k = 1$, $m = 1$ *кг*, $a = 1$ *м/сек*^{2}, получим:

$$1 \text{ единица силы} = 1\cdot 1 \text{ кг}\cdot 1 \text{ м/сек}^2 = 1\,\frac{\text{кг}\cdot\text{м}}{\text{сек}^2}.$$

Следовательно, в системе МКС за единицу силы мы должны взять такую силу, под действием которой тело массой 1 *кг* получает ускорение 1 *м/сек*^{2}. Такая единица силы называется ньютоном (*н*).

Таблица 3

Наименование величины	Единица измерения	Сокращенное обозначение
Основные единицы		
Длина	метр	*м*
Масса	килограмм	*кг*
Время	секунда	*сек*
Производные единицы		
Площадь	квадратный метр	*м*^{2}
Объем	кубический метр	*м*^{3}
Частота	герц	*гц*
Плотность	килограмм на кубический метр	*кг/м*^{3}
Скорость	метр в секунду	*м/сек*
Угловая скорость	радиан в секунду	*рад/сек*
Ускорение	метр на секунду в квадрате	*м/сек*^{2}
Сила	ньютон	*н*
Давление	ньютон на квадратный метр	*н/м*^{2}
Удельный вес	ньютон на кубический метр	*н/м*^{3}
Работа, энергия, количество теплоты	джоуль	*дж*
Мощность	ватт	*вт*
Момент инерции	килограмм-метр в квадрате	*кг·м*^{2}

Таким же способом можно определить производную единицу любой физической величины в системе МКС.

В табл. 3 в соответствии с ГОСТ 7661—61 даны основные и важнейшие производные единицы для измерения механических величин в системе МКС.

В табл. 4 даны соотношения между некоторыми механическими единицами Международной системы и допускаемыми ГОСТ 7664—61 единицами других систем и внесистемными единицами.

Таблица 4

Наименование величины	Единица измерения	Сокращенное обозначение	Размер единицы в системе СИ
Длина	сантиметр	*см*	10^{-2} *м*
Длина	микрон	*мк*	10^{-6} *м*
Длина	ангстрем	Å	10^{-10} *м*
Масса	грамм	*г*	10^{-3} *кг*
Масса	тонна	*т*	10^{3} *кг*
Масса	центнер	*ц*	10^{2} *кг*
Масса	карат	—	$2\cdot10^{-4}$ *кг*
Время	час	*ч*	3600 *сек*
Время	минута	*мин*	60 *сек*
Плоский угол	градус	°	$\frac{\pi}{180}$ *рад*
Плоский угол	минута	′	$\frac{\pi}{108}10^{-2}$ *рад*
Плоский угол	секунда	″	$\frac{\pi}{648}\cdot10^{-3}$ *рад*
Площадь	квадратный сантиметр	*см*²	10^{-4} *м*²
Площадь	ар	*а*	100 *м*²
Площадь	гектар	*га*	10^{4} *м*²
Объем	кубический сантиметр	*см*³	10^{-6} *м*³
Объем	литр	*л*	10^{-3} *м*³
Сила	дина	*дин*	10^{-5} *н*
Сила	килограмм (сила)	*кГ*	9,81 *н*
Сила	тонна (сила)	*Т*	$9,81\cdot10^{3}$ *н*
Давление	дина на квадратный сантиметр	*дин/см*²	0,1 *н/м*²
Давление	килограмм (сила) на квадратный метр	*кГ/м*²	9,81 *н/м*²
Давление	бар	*бар*	10^{5} *н/м*²
Давление	миллиметр ртутного столба	*мм рт. ст.*	133,3 *н/м*²

Продолжение таблицы 4

Наименование величины	Единица измерения	Сокращенное обозначение	Размер единицы в системе СИ
Давление	техническая атмосфера	*ат* или *кГ/см*²	$0,981\cdot10^{5}$ *н/м*²
Давление	физическая атмосфера	*атм**	$1,013\cdot10^{5}$ *н/м*²
Работа, энергия	эрг	*эрг*	10^{-7} *дж*
Работа, энергия	килограмм (сила)-метр	*кГм*	9,81 *дж*
Работа, энергия	ватт-час	*вт·ч*	$3,6\cdot10^{3}$ *дж*
Работа, энергия	электрон-вольт	*эв*	$1,6\cdot10^{-19}$ *дж*
Количество теплоты	калория	*кал*	4,19 *дж*
Количество теплоты	килокалория	*ккал*	$4,19\cdot10^{3}$ *дж*
Мощность	эрг в секунду	*эрг/сек*	10^{-7} *вт*
Мощность	килограмм (сила)-метр в секунду	*кГм/сек*	9,81 *вт*
Мощность	лошадиная сила	*л. с.*	736 *вт* (75 *кГм/сек*)

ТЕПЛОТА И МОЛЕКУЛЯРНАЯ ФИЗИКА

Составной частью Международной системы единиц (СИ) является система МКСГ, предназначенная для измерения тепловых величин (ГОСТ 8550—61). В табл. 5 в соответствии с ГОСТ 8550—61 приводятся основные и важнейшие производные единицы для измерения тепловых величин в системе МКСГ.

Таблица 5

Наименование величины	Единица измерения	Сокращенное обозначение
Основные единицы		
Длина	метр	*м*
Масса	килограмм	*кг*
Время	секунда	*сек*
Температура	градус	°К, *град* °С, *град*

* Внесистемная единица «физическая атмосфера» в ГОСТ 7664—61 отсутствует.

Продолжение таблицы 5

Наименование величины	Единица измерения	Сокращенное обозначение
Важнейшие производные единицы		
Количество теплоты	джоуль	*дж*
Теплоемкость системы	джоуль на градус	*дж/град*
Удельная теплоемкость	джоуль на килограмм-градус	*дж/кг·град*
Удельная теплоемкость фазового превращения	джоуль на килограмм	*дж/кг*

Стандартом допускается также применение для измерения тепловых единиц внесистемных единиц, основанных на калории (табл. 6).

Таблица 6

Наименование величины	Единица измерения	Сокращенное обозначение	Размер единицы в системе СИ
Количество теплоты	калория килокалория	*кал* *ккал*	4,19 *дж* $4{,}19 \cdot 10^3$ *дж*
Теплоемкость системы	калория на градус килокалория на градус	*кал/град* *ккал/град*	4,19 *дж/град* $4{,}19 \cdot 10^3$ *дж/град*
Удельная теплоемкость	калория на грамм-градус килокалория на килограмм-градус	*кал/г·град* *ккал/кг·град*	$4{,}19 \cdot 10^3$ *дж/кг·град*
Удельная теплота фазового превращения	калория на грамм килокалория на килограмм	*кал/г* *ккал/кг*	$4{,}19 \cdot 10^3$ *дж/кг*

ЭЛЕКТРИЧЕСТВО

Электрические и магнитные единицы

Составной частью Международной системы единиц (СИ) является система МКСА, предназначенная для измерения электрических и магнитных величин (ГОСТ 8033—56).

Основными единицами этой системы являются метр (*м*), килограмм (*кг*), секунда (*сек*) и ампер (*а*). Производные единицы системы МКСА образуются на основании законов, устанавливающих связь между физическими величинами.

Применение системы единиц МКСА связано с рационализацией формул. Во многие уравнения, относящиеся к теории электрических и магнитных явлений,

входит числовой множитель 4π (например, теорема Гаусса, емкость плоского конденсатора, напряженность магнитного поля внутри соленоида и т. д.). Рационализация уравнений ставит своей целью исключение этого множителя из наиболее часто применяемых в электротехнике и радиотехнике формул; при этом, однако, множитель 4π войдет в другие формулы, используемые реже, где его присутствие может быть объяснено геометрическими соображениями. ГОСТ электрические и магнитные единицы Международной системы устанавливаются для рационализованной формы уравнений электромагнитного поля.

Кроме системы МКСА, ГОСТ 8033—56 допускает для электрических и магнитных измерений также применение системы СГС. Поэтому числовые данные, приводимые в условиях задач, не всегда могут даваться в системе МКСА.

В табл. 7 приведены единицы измерения электрических и магнитных величин в системе СИ.

Таблица 7

Наименование величины	Единица измерения	Сокращенное обозначение	Размерность
Основные единицы			
Длина	метр	*м*	*м*
Масса	килограмм	*кг*	*кг*
Время	секунда	*сек*	*сек*
Сила электрического тока	ампер	*а*	*а*
Производные единицы			
Работа и энергия	джоуль	*дж*	$м^2кг \cdot сек^{-2}$
Мощность	ватт	*вт*	$м^2кг \cdot сек^{-3}$
Количество электричества	кулон	*к*	$а \cdot сек$
Разность потенциалов и электродвижущая сила	вольт	*в*	$м^2кг \cdot сек^{-3} \cdot а^{-1}$
Напряженность электрического поля	вольт на метр	*в/м*	$м \cdot кг \cdot сек^{-3} \cdot а^{-1}$
Электрическая емкость	фарада	*ф*	$м^{-2}кг^{-1}сек^4а^2$
Электрическая индукция (электрическое смещение)	кулон на квадратный метр	$к/м^2$	$м^{-2}сек \cdot а$
Электрическое сопротивление	ом	*ом*	$м^2кг \cdot сек^{-3} \cdot а^{-2}$
Поток магнитной индукции	вебер	*вб*	$м^2кг \cdot сек^{-2}а^{-1}$
Магнитная индукция	тесла (вебер на квадратный метр)	*тл*	$кг \cdot сек^{-2}а^{-1}$
Индуктивность	генри	*гн*	$м^2кг \cdot сек^{-2}а^{-2}$
Напряженность магнитного поля	ампер на метр	*а/м*	$а \cdot м^{-1}$

ОПТИКА

Световые единицы

В табл. 8 в соответствии с ГОСТ 7932—56 приведены основные и некоторые производные единицы, предназначенные для световых измерений в системе СИ.

Таблица 8

Наименование величины	Единица измерения	Сокращенное обозначение
Основные единицы		
Длина	метр	*м*
Время	секунда	*сек*
Сила света	свеча	*св*
Производные единицы		
Световой поток	люмен	*лм*
Освещенность	люкс	*лк*

Свеча — единица силы света, значение которой принимается таким, чтобы яркость полного излучателя при температуре затвердевания платины была равна 60 *св* на 1 *см*².

За единицу светового потока в этой системе принят люмен (*лм*) — световой поток, испускаемый внутри телесного угла в 1 стерадиан точечным источником света силой в 1 свечу. Таким образом, 1 *лм* = 1*св*·1 *стер*.

Освещенность измеряется в люксах. Один люкс — освещенность площадки в 1 квадратный метр равномерно распределенным световым потоком в 1 люмен. Таким образом, 1 *лк* = 1 *лм*/*м*².

СТРОЕНИЕ АТОМА

В главе «Строение атома» используются атомные постоянные и единицы измерения, которые должны быть выражены в единицах Международной системы. Рассмотрим некоторые примеры.

Масса (m). За атомную единицу массы (а. е м.) принята 1/16 массы наиболее легкого изотопа кислорода, равная $1{,}66\cdot10^{-27}$ *кг*. Ее величину можно определить так: один грамм-атом кислорода имеет массу 16 *г* и содержит $6{,}02\cdot10^{23}$ атомов (число Авогадро). Поэтому масса одного атома кислорода в граммах:

$$m=\frac{16\ г/г\cdot атом}{6{,}02\cdot10^{23}\ 1/г\cdot атом}=2{,}66\cdot10^{-23}\ г;$$

1/16 этой массы равна

$$1\ а.\ е.\ м.=\frac{2{,}66\cdot10^{-23}}{16}=1{,}66\cdot10^{-24}\ г=1{,}66\cdot10^{-27}\ кг.$$

Масса покоя электрона равна $5{,}5\cdot10^{-4}$ а. е. м. $=9{,}1\cdot10^{-31}$ *кг*.

Энергия (E).

1 *эв* $=1{,}6\cdot10^{-19}$*к*·1 *в* $=1{,}6\cdot10^{-19}$ *дж*;

1 *кэв* $=1{,}6\cdot10^{-16}$ *дж*;

1 *Мэв* $=1{,}6\cdot10^{-13}$ *дж*.

Энергия покоя электрона

$$E=m_0c^2;$$

$$E=9{,}1\cdot10^{-31}\ кг\,(3\cdot10^8)^2\ м^2/сек^2=8{,}19\cdot10^{-14}\ кг\cdot м^2/сек^2=8{,}19\cdot10^{-14}\ н\cdot м=$$
$$=8{,}19\cdot10^{-14}\ дж=0{,}51\ Мэв.$$

Энергия покоя 1 а. е. м. вычисляется аналогично предыдущему, получаем величину 931 *Мэв*.

Интерес представляет вычисление энергии покоя 1 *кг* массы вещества:

$$E=1\ кг\cdot9\cdot10^{16}\ м^2/сек^2=9\cdot10^{16}\ дж=9\cdot10^{16}\ вт\cdot сек=\frac{9\cdot10^{16}}{3600}\ вт\cdot ч=$$
$$=25\cdot10^9\ квт\cdot ч=25\ млрд.\ квт\cdot ч\ (!).$$

Активностью радиоактивного изотопа, или просто активностью, называется количество радиоактивных превращений в препарате за единицу времени.

За единицу измерения активности радиоактивных препаратов принимают кюри.

Кюри — активность радиоактивного препарата, в котором происходит $3{,}7\cdot10^{10}$ распадов в 1 *сек*.

В прил. *II* (*1*, *24*) приводятся числовые значения некоторых постоянных физических величин в Международной системе единиц, применяемых в атомной физике.

Приложение II

1. Основные физические величины

Постоянная тяготения	$6{,}67\cdot10^{-11}$ *м*³/*кг·сек*²
Число Авогадро	$6{,}02\cdot10^{26}$ *кг·моль*$^{-1}$
Объем 1 *кг·моля* идеального газа при нормальных условиях	22,4 *м*³
Постоянная Планка	$6{,}62\cdot10^{-34}$ *дж·сек*
Число Фарадея	$9{,}65\cdot10^7$ *к*/*кг·экв*
Заряд электрона	$1{,}602\cdot10^{-19}$ *к*
Масса электрона	$9{,}1\cdot10^{-31}$ *кг*
Скорость распространения света в вакууме	$3{,}00\cdot10^8$ *м*/*сек*
Скорость звука в воздухе при 0° С	332 *м*/*сек*
Универсальная газовая постоянная	$8{,}31\cdot10^3$ *дж*/*кг·моль·град*

[1] Для всех величин даны средние значения.

2. Некоторые астрономические величины

Средний радиус Земли	$6{,}37 \cdot 10^6$ *м*
Средняя плотность Земли	5500 *кг/м³*
Масса Земли	$5{,}96 \cdot 10^{24}$ *кг*
Радиус Солнца	$6{,}95 \cdot 10^8$ *м*
Масса Солнца	$1{,}97 \cdot 10^{30}$ *кг*
Радиус Луны	$1{,}74 \cdot 10^6$ *м*
Масса Луны	$7{,}3 \cdot 10^{22}$ *кг*
Среднее расстояние от Луны до Земли	$3{,}84 \cdot 10^8$ *м*
Период обращения Луны вокруг Земли	27 *суток* 7 *ч* 43 *мин*
Средняя плотность Солнца	1400 *кг/м³*
Среднее расстояние от Земли до Солнца	$1{,}49 \cdot 10^8$ *км*

3. Математические постоянные

	n	$\lg n$
e	2,7182818	0,4343
π	3,1415927	0,4972
4π	12,56637	1,0992
π^2	9,86960	0,9943
$\sqrt{\pi}$	1,77245	0,2486
ln 10	2,3026	0,3622
$\frac{1}{\pi}$	0,3183	$\bar{1}{,}5028$
g	980,665	2,9915
$\sqrt{g}$	31,321	1,4958
$\sqrt{2}$	1,4142	0,1505
$\sqrt{3}$	1,7302	0,2386
1°	0,01745329 *рад*	
1 *рад*	57,29578°	
1′	0,000291 *рад*	

4. Плотности

(*кг/м³* при обычной комнатной температуре 17—23° С)

Металлы

Алюминий	2 700
Висмут	9 780
Железо: чистое	7 880
сварное	7 850
чугун	7 600
сталь	7 700
Золото	19 300
Калий	860
Кальций	1 540
Магний	1 740
Марганец	7 410
Медь	8 890
Натрий	9 700
Никель	8 800
Олово	7 290
Ртуть (тверд., — 39° С)	14 190
Свинец	11 340
Серебро	10 500
Цинк	7 100

Сплавы

Бронза	8800—8900:
(колокольная)	8700
(фосфористая)	8800
Инвар	8000
Константан	8880
Латунь	8400—8700
Магналий (магниево-алюминиевый сплав)	2000—2500
Манганин	8500

Различные вещества

Алмаз	3500
Асбест	2000—2800
Древесина: дуб	600—900
ясень	600—800
Целлулоид	1400
Эбонит	1150
Лед (при 0° С)	917
Парафин	900—920
Плавленый кварц	2100—2200
Пробка	220—260
Слюда	2600—3200
Стекло	2400—2800

Жидкости (при 15° С)

Анилин	1020
Ацетон	792
Бензин	899
Вода морская	1025
Глицерин	1260
Керосин	800
Масло: оливковое	920
смазочное	900—920
Скипидар	870
Спирт: метиловый	810
этиловый	791
Эфир	736

Газы ($г/м^3$ при нормальных условиях)

Азот	1251	Двуокись углерода	1976	Окись углерода	1250
Аммиак	770,8	Кислород	1429	Сероводород	1539
Аргон	1783	Криптон	3680	Фтор	1690
Водород	90	Ксенон	5850	Хлор	3220
Воздух	1292	Метан	716	Хлористый водород	1639
Гелий	178	Неон	900		

5. Коэффициент трения скольжения *k*

Бронза по бронзе	0,20	Кожаный ремень по дереву	0,40
Бронза по стали	0,21	Кожаный ремень по чугуну	0,28
Бронза по чугуну со смазкой	0,10	Дерево по дереву	0,20—0,65
Сталь по стали (3 *м/сек*)	0,09	Уголь по меди	0,25
Чугун по чугуну со смазкой	0,15		

6. Удельная теплоемкость (*дж/кг·град*)

Алюминий	880	Олово	200
Бетон	880	Парафин	3200
Вода	4190	Полиэтилен	2300
Глицерин	2400	Пробка	2000
Дерево (сосна)	2700	Ртуть	138
Железо	460	Свинец	130
Золото	100	Серебро	200
Керосин	2100	Спирт	2400
Латунь	380	Сталь	460
Лед	2100	Стекло	830
Медь	400	Цинк	400
Никель	460	Чугун	540

Удельные теплоемкости газов при постоянном давлении (*дж/кг·град*)

Азот	1 000	Гелий	5210
Аммиак	2 100	Кислород	920
Водород	14 300	Углекислый газ	830
Воздух	1 000		

7. Теплота сгорания топлива (10^6 *дж/кг*)

Антрацит	31	Лигроин	43,3
Бензин	46	Мазут	40
Бурый уголь	9,93	Нефть	46
Дрова сухие	8,3	Порох	3,8
Каменный уголь	30	Природный газ	36
Керосин	46	Спирт	30
Кокс	30	Торф	15
		Условное топливо	30

8. Удельная теплота плавления (*кдж/кг*)

Алюминий	380	Ртуть	10
Железо	270	Свинец	30
Лед	330	Серебро	100
Медь	180	Цинк	120
Нафталин	150	Чугун белый	140
Олово	58	Чугун серый	96
Парафин	150		

9. Температура плавления и отвердевания (°C)

Алюминий	660	Раствор повар. соли (насыщ.)	—18
Вода	0	Ртуть	—39
Морская вода	—2,5	Свинец	327
Железо	1530	Серебро	960
Золото	1060	Спирт	—114
Лед	0	Сталь	1400
Медь	1080	Цинк	420
Нафталин	80	Чугун	1150
Олово	232	Эфир	—123

10. Температура кипения (при 760 *мм рт. ст.*)

Азот (жидкий)	—196	Кислород (жидкий)	—183
Алюминий	1800	Медь	2300
Аммиак	—33	Нафталин	218
Вода	100	Олово	2300
Водород (жидкий)	—253	Ртуть	357
Воздух »	—193	Свинец	1600
Гелий »	—269	Скипидар	160
Глицерин	290	Спирт	78
Железо	2450	Эфир	35
Золото	2600		

11. Удельная теплота парообразования (*кдж/кг*)

Аммиак	1370	Сероуглерод	350
Бензин	398	Скипидар	294
Вода	2260	Спирт	855
Ртуть	289	Эфир	352

12. Теплопроводность некоторых твердых тел (*вт/м·град*)

Алюминий	210	Песок сухой	0,325
Войлок	0,046	Пробка	0,050
Железо	58,7	Серебро	460
Кварц плавленый	1,37	Эбонит	0,174
Медь	390		

13. Коэффициент линейного расширения *(град$^{-1}$)*

Алюминий	0,000024	Платина	0,000009
Железо	0,000012	Платинит (сплав)	0,000009
Золото	0,000014	Свинец	0,000029
Инвар	0,000015	Серебро	0,000019
Кварц плавленый	0,0000004	Сталь	0,000011
Латунь	0,000019	Стекло	0,000009
Медь	0,000017	Цинк	0,000029
Олово	0,000027	Чугун	0,000010

14. Коэффициент объемного расширения жидкостей β *(град$^{-1}$)*

Вода	0,00018	Нефть	0,0010
Бензин	0,0010	Ртуть	0,00018
Глицерин	0,0005	Спирт	0,0011
Керосин	0,0010	Эфир	0,00166
Масло	0,00072		

15. Коэффициент поверхностного натяжения при 20° С *(н/м)*

Бензол	0,03	Керосин	0,03
Вода	0,073	Ртуть	0,5
Глицерин	0,064	Спирт	0,02

16. Модуль упругости *E (н/м^2)*

Алюминий	$7\cdot10^{10}$	Медь	$12\cdot10^{10}$
Дерево	$1\cdot10^{10}$	Свинец	$1{,}7\cdot10^{10}$
Дюралюминий	$7{,}5\cdot10^{10}$	Сталь	$21\cdot10^{10}$
Кирпич	$1\cdot10^{10}$	Чугун	$10\cdot10^{10}$
Латунь	$9\cdot10^{10}$		

17. Упругость насыщающих водяных паров *(мм рт. ст.)* и количество их в 1 *м^3 (кг)*

Температура, °С	Упругость	Масса	Температура, °С	Упругость	Масса
−5	3,01	$2{,}14\cdot10^{-3}$	15	12,8	$12{,}8\cdot10^{-3}$
0	4,58	$4{,}84\cdot10^{-3}$	16	13,6	$13{,}6\cdot10^{-3}$
1	4,9	$5{,}2\cdot10^{-3}$	17	14,5	$14{,}5\cdot10^{-3}$
2	5,3	$5{,}6\cdot10^{-3}$	18	15,5	$15{,}4\cdot10^{-3}$
3	5,7	$6{,}0\cdot10^{-3}$	19	16,5	$16{,}3\cdot10^{-3}$
4	6,1	$6{,}4\cdot10^{-3}$	20	17,5	$17{,}3\cdot10^{-3}$
5	6,6	$6{,}8\cdot10^{-3}$	21	18,7	$18{,}3\cdot10^{-3}$
6	7,0	$7{,}3\cdot10^{-3}$	22	19,8	$19{,}4\cdot10^{-3}$
7	7,5	$7{,}8\cdot10^{-3}$	23	21,1	$20{,}6\cdot10^{-3}$
8	8,0	$8{,}3\cdot10^{-3}$	24	22,4	$21{,}8\cdot10^{-3}$
9	8,6	$8{,}8\cdot10^{-3}$	25	23,8	$23{,}0\cdot10^{-3}$
10	9,2	$9{,}4\cdot10^{-3}$	26	25,2	$24{,}4\cdot10^{-3}$
11	9,8	$10{,}0\cdot10^{-3}$	27	26,7	$25{,}8\cdot10^{-3}$
12	10,5	$10{,}7\cdot10^{-3}$	28	28,4	$27{,}2\cdot10^{-3}$
13	11,2	$11{,}4\cdot10^{-3}$	29	30,0	$28{,}7\cdot10^{-3}$
14	12,0	$12{,}1\cdot10^{-3}$			

18. Психрометрическая таблица относительной влажности воздуха (%)

Показание сухого термометра, °С	Разность показаний сухого и влажного термометров, °С										
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	100	81	63	45	28	11	—	—	—	—	—
2	100	84	68	51	35	20	—	—	—	—	—
4	100	85	70	56	42	28	14	—	—	—	—
6	100	86	73	60	47	35	23	10	—	—	—
8	100	87	75	63	51	40	28	18	7	—	—
10	100	88	76	65	54	44	34	24	14	4	—
12	100	89	78	68	57	48	38	29	20	11	—
14	100	90	79	70	60	51	42	33	25	17	9
16	100	90	81	71	62	54	45	37	30	22	15
18	100	91	82	73	64	56	48	41	34	26	20
20	100	91	83	74	66	59	51	44	37	30	24
22	100	92	83	76	68	61	54	47	40	34	28
24	100	92	84	77	69	62	56	49	43	37	31
26	100	92	85	78	71	64	58	50	45	40	34
28	100	93	85	78	72	65	59	53	48	42	37
30	100	93	86	79	73	67	61	55	50	44	39

19. Диэлектрическая проницаемость диэлектриков

Алмаз	16,5	Каменная соль	5,6
Ацетон	21,5	Кварц плавленый	3,5—4
Бакелит	5	Керосин	2,0
Бензин	2,3	Парафин	2,0
Бумага	2—2,5	Парафинированная бумага	2,2
Вода	81	Плексиглас	3,3
Воздух	1,0006	Слюда	6
Вакуум	1	Стекло	7
Воск пчелиный	3	Титанат бария	1200
Гетинакс	5	Фарфор	5,7—6,3
Глицерин	39,1	Эбонит	2,6
Дерево	22—37	Янтарь	2,8

Абсолютная диэлектрическая проницаемость в системе СИ получается умножением на $8{,}85 \cdot 10^{-12}$ *ф/м*

20. Удельное сопротивление *(ом·мм²/м* или 10^{-6} *ом·м)*

Алюминий	0,028	Нихром	1,1
Вольфрам	0,055	Платина	0,10
Графит	0,390	Ртуть	0,958
Железо	0,098	Свинец	0,210
Константан	0,480	Серебро	0,016
Латунь	0,071	Сталь	0,12
Манганин	0,45	Фехраль	1,2
Медь	0,017	Хромель	1,1
Никелин	0,42	Цинк	0,060

21. Температурный коэффициент сопротивлений *(град$^{-1}$)*

Алюминий	0,0042	Платина	0,0025
Вольфрам	0,0046	Ртуть	0,00027
Константан	0,00005	Свинец	0,0041
Манганин	0,000015	Серебро	0,0040
Медь	0,0040	Сталь	0,0050
Никелин	0,0003	Уголь для дуговых ламп	0,0008
Нихром	0,0003	Цинк	0,0039

22. Электрохимический эквивалент *(кг/к)*

Алюминий (Al···)	$0{,}093 \cdot 10^{-6}$	Медь (Cu·)	$0{,}66 \cdot 10^{-6}$
Водород (H·)	$0{,}01044 \cdot 10^{-6}$	Медь (Cu··)	$0{,}33 \cdot 10^{-6}$
Железо (Fe··)	$0{,}29 \cdot 10^{-6}$	Никель (Ni···)	$0{,}30 \cdot 10^{-6}$
Железо (Fe···)	$0{,}19 \cdot 10^{-6}$	Серебро (Ag·)	$1{,}118 \cdot 10^{-6}$
Золото (Au··)	$0{,}68 \cdot 10^{-6}$	Хлор (Cl·)	$0{,}367 \cdot 10^{-6}$
Кислород (O··)	$0{,}0829 \cdot 10^{-6}$	Цинк (Zn··)	$0{,}34 \cdot 10^{-6}$

23. Показатель преломления

Алмаз	2,42	Кедровое масло	1,505
Вода	1,33	Лед	1,31
Воздух	1,00029	Сероуглерод	1,63
Глицерин	1,47	Спирт	1,36
Каменная соль	1,54	Стекло (тяж. флинт)	1,8
Кварц	1,54	Стекло (лег. крон)	1,5

24. Массы некоторых изотопов и элементарных частиц

Изотоп	Масса	Изотоп	Масса
${}_1H^1$	1,00813	${}_4Be^9$	9,01503
${}_1H^2$	2,01471	${}_7N^{14}$	14,00750
${}_1H^3$	3,01700	${}_8O^{17}$	17,00450
${}_2He^3$	3,01698	${}_{13}Al^{27}$	26,98990
${}_2He^4$	4,00390	${}_{15}P^{31}$	30,9843
${}_3Li^6$	6,01697	протон	1,00758
${}_3Li^7$	7,01822	нейтрон	1,00897
${}_4Be^8$	8,00785	электрон	0,00055

25. Таблица значений синусов и тангенсов углов

Градусы	Синусы	Тангенсы	Градусы	Синусы	Тангенсы	Градусы	Синусы	Тангенсы
0	0,0000	0,0000	15	0,2588	0,2679	30	0,5000	0,5774
1	0,0175	0,0175	16	0,2756	0,2867	31	0,5150	0,6009
2	0,0349	0,0349	17	0,2924	0,3057	32	0,5299	0,6249
3	0,0523	0,0524	18	0,3090	0,3249	33	0,5446	0,6494
4	0,0698	0,0699	19	0,3256	0,3443	34	0,5592	0,6745
5	0,0872	0,0875	20	0,3420	0,3640	35	0,5736	0,7002
6	0,1045	0,1051	21	0,3584	0,3839	36	0,5878	0,7265
7	0,1219	0,1228	22	0,3746	0,4040	37	0,6018	0,7536
8	0,1392	0,1405	23	0,3907	0,4245	38	0,6157	0,7813
9	0,1564	0,1584	24	0,4067	0,4452	39	0,6293	0,8098
10	0,1736	0,1763	25	0,4226	0,4663	40	0,6428	0,8391
11	0,1908	0,1944	26	0,4384	0,4877	41	0,6561	0,8693
12	0,2079	0,2126	27	0,4540	0,5095	42	0,6691	0,9004
13	0,2250	0,2309	28	0,4965	0,5317	43	0,6820	0,9325
14	0,2419	0,2493	29	0,4848	0,5543	44	0,6947	0,9657

Продолжение таблицы 25

Градусы	Синусы	Тангенсы	Градусы	Синусы	Тангенсы	Градусы	Синусы	Тангенсы
45	0,7071	1,0000	60	0,8660	1,732	75	0,9659	3,732
46	0,7193	1,036	61	0,8746	1,804	76	0,9703	4,011
47	0,7314	1,072	62	0,8829	1,881	77	0 9744	4,331
48	0,7431	1,111	63	0,8910	1,963	78	0,9781	4,705
49	0,7547	1,150	64	0,8988	2,050	79	0,9816	5,145
50	0,7660	1,192	65	0,9063	2,145	80	0,9848	5,671
51	0,7771	1,235	66	0,9135	2,246	81	0,9877	6,314
52	0,7880	1,280	67	0,9205	2,356	82	0,9903	7,115
53	0,7986	1,327	68	0,9272	2,475	83	0,9925	8,144
54	0,8090	1,376	69	0,9336	2,605	84	0,9945	9,514
55	0,8192	1,428	70	0,9397	2,747	85	0,9962	11,430
56	0,8290	1,483	71	0,9455	2,904	86	0,9976	14,309
57	0,8387	1,540	72	0,9511	3,078	87	0,9986	19,080
58	0,8480	1,600	73	0,9563	3,271	88	0,9994	28,640
59	0,8572	1,664	74	0,9613	3,487	89	0,9998	57,290
						90	1,0000	∞

Примечание. Для всех величин приложения II даны средние значения.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Стр.

От авторов 3

Глава I. **Механика** 5

Кинематика 5
Динамика 25
Статика 47
Работа и энергия 55
Закон всемирного тяготения 73
Колебательные движения 83
Механика жидкостей и газов 87

Глава II. **Теплота и молекулярная физика** 103

Тепловое расширение твердых и жидких тел 103
Свойства газов и паров 127
Свойства жидкостей 144

Глава III. **Электричество** 151

Электростатика 151
Постоянный электрический ток 163
Переменный ток, электромагнитные колебания и волны 199

Глава IV. **Оптика** 204

Отражение и преломление света 204
Линзы. Оптические приборы 212
Фотометрия 223
Волновые свойства и действия света 229

Глава V. **Строение атома** 237

ПРИЛОЖЕНИЯ

Приложение I

Международная система единиц 248
Механика 250
Теплота и молекулярная физика 253
Электричество 254
Оптика 256
Строение атома 256

Стр.

Приложение II

1. Основные физические величины 257
2. Некоторые астрономические величины 258
3. Математические постоянные 258
4. Плотности 259
5. Коэффициент трения скольжения k 260
6. Удельная теплоемкость 260
7. Теплота сгорания топлива 260
8. Удельная теплота плавления 261
9. Температура плавления и отвердевания 261
10. Температура кипения 261
11. Удельная теплота парообразования 261
12. Теплопроводность некоторых твердых тел 261
13. Коэффициент линейного расширения 262
14. Коэффициент объемного расширения жидкостей β 262
15. Коэффициент поверхностного натяжения 262
16. Модуль упругости E 262
17. Упругость насыщающих водяных паров и количество их в 1 $м^3$ . . 262
18. Психрометрическая таблица относительной влажности воздуха . . 263
19. Диэлектрическая проницаемость диэлектриков 264
20. Удельное сопротивление 264
21. Температурный коэффициент сопротивлений 264
22. Электрохимический эквивалент 264
23. Показатель преломления 265
24. Массы некоторых изотопов и элементарных частиц 265
25. Таблица значений синусов и тангенсов углов 265

Варикаш Викентий Михайлович,
Цедрик Михаил Семенович

ИЗБРАННЫЕ ЗАДАЧИ ПО ФИЗИКЕ С РЕШЕНИЯМИ. Минск, «Высшая школа» 1966.
268 стр.

Редакторы Канторович А. Я., Молчанова А. К. Худож. редактор Валентович В. Н. Техн. редактор Романчук Г. М. Корректоры Белянкина А. А., Васюк Ж. И.

АТ 04368. Сдано в набор 6/X 1965 г. Подписано к печати 17/XII 1965 г. Тираж 210 000 (1-й завод 1—75 000) экз. Бумага $60 \times 84^1/_{16}$. Печ. л. 16,75+1 вкл. Усл. печ. л. 15,58+1 вкл. Уч.-изд. л. 14,2. Изд. № 65-54. Заказ 1350. Цена без переплета 43 коп., переплет 15 коп.

Издательство «Высшая школа» Комитета по печати при Совете Министров БССР. Редакция физико-математической литературы.
Темплан 1966 г. № 49.
Минск, ул. Кирова, 24.

Отпечатано с матриц типографии издательства «Звязда» полиграфкомбинатом им. Я. Коласа Комитета по печати при Совете Министров БССР, Минск, Красная, 23.

58 к.